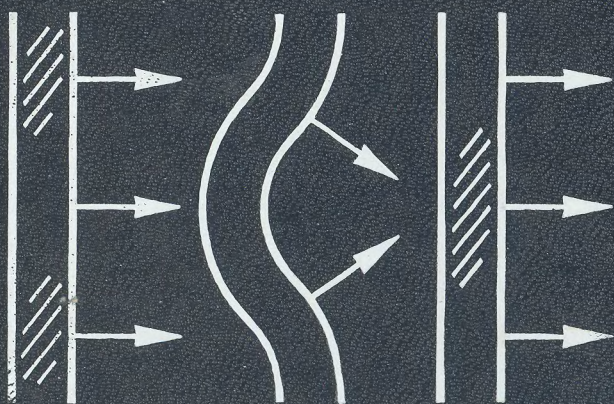


# КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

---

Б. Б. КАДОМЦЕВ



Б. Б. КАДОМЦЕВ  
КОЛЛЕКТИВНЫЕ  
ЯВЛЕНИЯ  
В ПЛАЗМЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1988

ББК 22.333  
К13  
УДК 533.9

Рецензент  
доктор физико-математических наук *М. В. Незлин*

**КАДОМЦЕВ Б. Б. Коллективные явления в плазме.** — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 304 с. — ISBN 5-02-014199-2.

Дано представление как о регулярных явлениях (нелинейных волнах в слабодиспергирующих средах, нелинейном затухании Ландау, эхо в плазме, взаимодействии волн и т. п.), так и о турбулентности плазмы, т. е. о нерегулярных колебаниях с возбуждением очень многих степеней свободы. Рассмотрение проведено, по возможности, в доступной форме с привлечением примеров из других областей физики. Новое издание дополнено изложением результатов последних лет.

Для физиков — экспериментаторов и теоретиков, а также аспирантов и студентов, интересующихся физикой плазмы.

Ил. 75. Библиогр.: 274 назв.

К 1704040000—123 101-87  
053(02)-88

ISBN 5-02-014199-2

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1976; с дополнениями, 1988

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
-----------------------	---

## ГЛАВА 1

### ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛАЗМЫ

§ 1. Плазма как состояние вещества . . . . .	7
§ 2. Магнитная гидродинамика . . . . .	10
§ 3. Равновесие плазмы . . . . .	13
§ 4. Двухжидкостная магнитная гидродинамика . . . . .	30
§ 5. Диффузия плазмы . . . . .	40

## ГЛАВА 2

### ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

§ 1. Альвеновские и магнитозвуковые волны . . . . .	53
§ 2. Дисперсия волн в двухжидкостной гидродинамике . . . . .	65
§ 3. Линейные волны в диспергирующих средах . . . . .	74
§ 4. Электромагнитные волны в плазме . . . . .	85
§ 5. Энергия и импульс волн . . . . .	100
§ 6. Волны в неоднородных средах . . . . .	112

## ГЛАВА 3

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

§ 1. Простые волны . . . . .	120
§ 2. Нелинейные волны в слабодиспергирующих средах . . . . .	128
§ 3. Самофокусировка и самосжатие волновых пакетов . . . . .	155
§ 4. Взаимодействие волн . . . . .	167

## ГЛАВА 4

**ВОЛНЫ И ЧАСТИЦЫ В ПЛАЗМЕ**

§ 1. Нелинейное затухание Ландау . . . . .	186
§ 2. Эхо в плазме . . . . .	197
§ 3. Рассеяние волн на частицах . . . . .	207

## ГЛАВА 5

**ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПЛАЗМЫ**

§ 1. Неустойчивость плазмы . . . . .	210
§ 2. Квазилинейное приближение . . . . .	243
§ 3. Слабая турбулентность . . . . .	251
§ 4. Ионно-звуковая турбулентность . . . . .	257
§ 5. Ленгмюровская турбулентность . . . . .	263
§ 6. МГД-турбулентность . . . . .	270
§ 7. Эволюция бесстолкновительных систем . . . . .	277

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**ПЕРЕЗАМЫКАНИЕ МАГНИТНЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ**

Самоорганизация плазмы в токамаках . . . . .	285
Пинчи с обратным полем . . . . .	289
Заключительные замечания . . . . .	290

<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>292</b>
------------------------------------	------------

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Термин «коллективные явления в плазме» появился довольно давно. На первых порах он еще не вполне приобрел свое конкретное содержание, а всего лишь отражал то смутное ощущение, что в системе заряженных частиц с дальнедействующими кулоновскими силами наряду с парными столкновениями должно существовать взаимодействие между частицами, имеющее некую особую коллективную природу. И лишь исследование реальной плазмы с ее многочисленными неустойчивостями, самопроизвольно развивающимися шумами и колебаниями, сложными нелинейными процессами постепенно вырисовывало круг тех явлений, которые стало принято называть коллективными.

В настоящее время коллективными явлениями в плазме называют сугубо нелинейные процессы, связанные с наличием колебаний или шумов конечной амплитуды, взаимодействие которых с частицами существенно влияет на макроскопические свойства плазмы. Чаще всего эти шумы и колебания возникают самопроизвольно вследствие различного рода неустойчивостей. Если возбуждается очень много степеней свободы и колебания становятся нерегулярными, то такое состояние плазмы называют турбулентным. Но кроме турбулентных состояний существует широкий круг нелинейных регулярных процессов, в которых взаимодействие между частицами и волнами — коллективными возбуждениями системы — может приводить к весьма своеобразным, подчас изумительно красивым явлениям. К ним относятся, например, эхо в плазме, нелинейное затухание Ландау, самосжатие и самофокусировка волновых пакетов, солитоны в слабодиспергирующих средах. Изучение такого рода нелинейных явлений само по себе очень интересно, но еще более оно полезно с точки зрения развития общих представлений о физике плазмы — этой своеобразной и

весьма своенравной субстанции. Не будет преувеличением сказать, что коллективные явления в плазме отражают саму ее природу, ее главное свойство.

В предлагаемой книге, которая может служить введением в теорию коллективных явлений в плазме, дается представление как о регулярных нелинейных процессах в плазме, так и о ее турбулентности. Чтобы облегчить чтение книги, в первой главе подробно рассматривается гидродинамический метод описания плазмы, а во второй главе кратко излагается теория линейных волн в том объеме, который достаточен для свободного чтения дальнейших глав. Изложение материала в этих последующих главах проводится, по возможности, в как можно более доступной форме, чтобы знакомство с этой интересной областью физики плазмы не превратилось в скучное изучение формул. Поскольку нелинейные явления в плазме сходны с нелинейными явлениями в других сплошных средах, в книге широко используются соответствующие аналогии.

В частности, нелинейные процессы в плазме, стартуя с линейных неустойчивостей, нередко приводят к развитию сложных стационарных или изменяющихся со временем структур. Их можно рассматривать как представителей широко распространенных в природе явлений самоорганизации. Структуры в диссипативных открытых системах изучаются в рамках так называемой синергетики, т. е. науки о самоорганизации. Для идей самоорганизации плазма является, вероятно, одной из наиболее продуктивных областей приложения, и на ее базе можно развивать подходы к пониманию более широкого круга явлений самоорганизации.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ  
ОПИСАНИЕ ПЛАЗМЫ

## § 1. Плазма как состояние вещества

1. *Четвертое состояние вещества.* Если следовать школьным представлениям о том, что по мере нагревания вещества оно испытывает последовательные превращения из твердого состояния в жидкость, а затем в газ, то естественно возникает вопрос, что же будет происходить с газом при его нагревании. Ясно, что по мере усиления хаотического движения молекул газа они, сталкиваясь, начнут расщепляться на составляющие их атомы, а затем и сами атомы начнут разрушаться, разбиваясь на электроны и ионы. Таким образом, при нагревании любого вещества оно должно в конце концов превратиться в плазму— сильно ионизованный газ. Именно в этом смысле плазму иногда называют четвертым состоянием вещества.

В отличие от резких фазовых переходов твердое тело — жидкость, жидкость — газ, переход к ионизованному состоянию является непрерывным, так что степень ионизации  $n_i/n_0$ , т. е. отношение плотности ионов  $n_i$  к плотности нейтральных атомов  $n_0$ , является плавной функцией температуры. Даже в пламени свечи имеется небольшое количество электронов и ионов, но вряд ли это пламя можно считать настоящей плазмой. Ясно поэтому, что определение плазмы требует еще некоторой количественной характеристики, которая показала бы, начиная с какой плотности заряженных частиц ионизованный газ можно считать плазмой.

Чтобы найти эту характеристику, нужно прежде всего представить себе, чем же новое состояние вещества отличается от обычного газа. Главная особенность колллектива заряженных частиц, составляющих плазму, со-



стоит в появлении нового типа взаимодействия частиц этого коллектива — через электрические и магнитные поля, т. е. посредством далекодействующих сил. Именно благодаря возможности этого типа взаимодействия коллектив заряженных частиц приобретает новые качества. Фактически он образует нечто целое вместе с теми электрическими и магнитными полями, которые с этими частицами взаимодействуют (их и называют поэтому самосогласованными полями). Таким образом, плазмой можно назвать ионизованный газ при такой плотности заряженных частиц, когда становится существенным взаимодействие этих частиц с самосогласованными электрическими и магнитными полями (в том числе — и с внешними полями).

Часто в качестве количественной характеристики того, что это взаимодействие становится существенным, пользуются понятием квазинейтральности плазмы, т. е. приближенного равенства плотности электронов  $n_e$  и ионов  $n_i$  (если последние однократно ионизованы) или равенства  $n_e = Z n_i$  (в более общем случае ионов со средним зарядовым числом  $Z$ ). В самом деле, при достаточно высокой плотности  $n_e$  (и соответственно  $n_i$ ) даже малое пространственное разделение зарядов плазмы привело бы к появлению очень сильных электрических полей. Поэтому при всех протекающих в плазме явлениях с полями естественной величины (например, порядка внешних полей) плотности ионов и электронов оказываются близкими друг к другу. Таким образом, плазма, т. е. достаточно плотная смесь электронов и ионов, должна сохранять квазинейтральность даже при достаточно бурно протекающих в ней процессах. Вместе с тем нужно ясно понимать, что квазинейтральность есть не изначальная характеристика плазмы, а всего лишь ее свойство, вытекающее из того, что главную роль в плазме играют взаимодействия частиц через самосогласованное поле.

*2. Неравновесность плазмы, теоретические модели.* Тот факт, что частицы плазмы выступают вместе с создаваемыми ими электрическими и магнитными полями, приводит к сильному усложнению протекающих в плазме явлений. Часто речь должна идти скорее не о свойствах вещества, а о свойствах сложного комплекса из вещества и электромагнитного поля. Наличие внешних полей, иногда также достаточно сложных и неконтролиру-

емых, еще больше запутывает всю картину. К этому следует добавить, что в лабораторных или природных условиях плазма часто является крайне неравновесной; она требует для своего создания совершенно необычных условий (например, вспышка молнии, полярное сияние, разряд в газовой трубке, вспышка в фокусе лазерного луча и т. п.). В такой неравновесной плазме в силу высокой ее подвижности и наличия далекодействующих сил очень легко развиваются различного рода неустойчивости и шумы.

В результате при изучении протекающих в плазме явлений часто приходится встречаться с ситуацией многопараметричности, т. е. с наличием многих одновременно протекающих процессов, из которых выбрать наиболее существенный часто бывает очень трудно. В этой ситуации для понимания происходящих в плазме явлений и в особенности для теоретического количественного или качественного их описания очень полезными оказываются упрощенные модели, нередко дополняющие друг друга. Так, например, рассматривая движение заряженных частиц в магнитных полях сложной формы, например в магнитных ловушках, можно использовать модель независимых частиц. Учитывая только парные столкновения частиц и не принимая во внимание шумов из-за неустойчивостей, строят так называемую классическую теорию плазмы. В пренебрежении взаимодействием с нейтральным газом можно получить приближенную модель полностью ионизованной плазмы. Учитывая только наиболее существенную характеристику ионизованного газа — способность проводить ток, — получают магнитогидродинамическое приближение, также моделирующее многие свойства плазмы.

В настоящей книге, центр тяжести которой лежит не на описании конкретных протекающих в плазме явлений, а на знакомстве с основными нелинейными явлениями, будут использоваться только самые простые модели. А именно, для коллективных эффектов, связанных с полями и волнами, но не с частицами, мы будем пользоваться магнитогидродинамическим приближением. Для эффектов же кинетических, где важно взаимодействие отдельных групп частиц с волнами, мы в основном будем использовать простейшую модель однородной неограниченной плазмы. Кроме того, как правило, плазму будем считать полностью ионизованной.

## § 2. Магнитная гидродинамика

1. *Уравнения магнитной гидродинамики.* Шведский физик Х. Альвен первым обратил внимание на то, что проводящие жидкость или газ при движении в магнитном поле обнаруживают исключительно интересные свойства. Эти свойства связаны с тем, что при перемещении проводящих масс жидкости в них возбуждаются токи индукции, которые совместно с магнитным полем оказывают обратное воздействие на жидкость. При этом не так существенно, о какой именно жидкости идет речь, важно лишь, чтобы она была электропроводной. Соответственно и в плазме, которая может свободно проводить ток, могут легко разыгрываться те явления, которые характерны для проводящих жидкостей. Собственно, в применении к космической плазме и развивал свои идеи Альвен.

Итак, мы познакомимся с тем классом явлений в плазме, который описывается в приближении магнитной гидродинамики (точнее, газодинамики). В этом приближении предполагается, что поведение плазмы сходно с поведением идеального газа с уравнением состояния  $p = 2nT$ , где  $p$  — давление,  $T$  — температура (в эргах), а  $n$  — плотность электронов и равная ей плотность однозарядных ионов. Поскольку масса электронов  $m_e$  значительно меньше массы ионов  $m_i$ , то массовая плотность  $\rho = m_i n$ . Пусть  $\mathbf{B}$  есть магнитное поле, а  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока.

Тогда уравнение движения жидкости с учетом силы Ампера запишется в виде

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}]. \quad (1.1)$$

К нему следует добавить уравнение непрерывности и уравнения Максвелла, в которых мы пренебрежем током смещения, считая, что все происходящие в плазме движения медленные, т. е. протекают со скоростями значительно меньше скорости света:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Плотность тока  $\mathbf{j}$  в проводящей среде равна  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}_*$ , где  $\mathbf{E}_*$  — электрическое поле в системе отсчета, движущейся вместе с жидким элементом. При  $v \ll c$  это поле равно

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Полагая  $\mathbf{E}_* = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B}$  и подставляя выражение для  $\mathbf{E}$  через  $\mathbf{E}_*$  в (1.5), мы приведем (1.5) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1) — (1.4) и (1.6) и составляют основную систему уравнений магнитной гидродинамики. В этих уравнениях мы пренебрегли вязкостью. Что касается температуры  $T$ , то для ее изменения со временем можно воспользоваться условием адиабатичности  $T \sim \sim n^{\gamma-1}$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты. Если характерные размеры возмущения в плазме невелики, то в силу высокой электронной теплопроводности более адекватным является приближение изотермической плазмы  $T = \text{const}$ .

Уравнения магнитной гидродинамики достаточно хорошо описывают крупномасштабные движения в плазме, для которых несущественно различие в движении отдельных групп составляющих ее частиц. В частности, эти уравнения хорошо описывают равновесие плазмы в магнитном поле в условиях, когда несущественна ее анизотропия, т. е. когда функция распределения частиц по скоростям близка к максвелловской.

2. *Вмороженность магнитного поля.* Рассмотрим несколько подробнее уравнение (1.6) и постараемся выяснить его физический смысл. Последнее слагаемое в правой части этого уравнения описывает диффузионное расплывание неоднородностей магнитного поля в проводящей среде вследствие конечной проводимости. Величину  $D_m = c^2/4\pi\sigma$  можно условно назвать коэффициентом диффузии магнитного поля. При достаточно большой проводимости диффузией поля можно пренебречь и мы приходим к идеальной гидродинамике, в которой

отсутствуют все виды диссипации. Уравнение (1.6) тогда принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (1.7)$$

В этом предельном случае уравнение (1.7) приводит к эффекту «приклеенности» силовых линий магнитного поля к плазме, или, как еще иногда говорят, к вмороженности магнитного поля в проводящую среду. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольный замкнутый контур  $L$ , движущийся вместе с плазмой, и введем в рассмотрение магнитный поток  $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$  через поверхность, ограниченную контуром  $L$ . Поскольку  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  и силовые линии магнитного поля нигде не кончаются, величина  $\Phi$  определяется лишь контуром  $L$  и не зависит от формы поверхности, натянутой на  $L$ . Найдем теперь изменение потока  $\Delta\Phi$  за время  $\Delta t$ :

$$\Delta\Phi = \int_{S'} \mathbf{B}' d\mathbf{S} - \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.8)$$

Здесь  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}(t + \Delta t, \mathbf{r})$  — магнитное поле в момент  $t + \Delta t$ ,  $S'$  — смещенная поверхность (рис. 1), а  $d\mathbf{S}$  — элемент

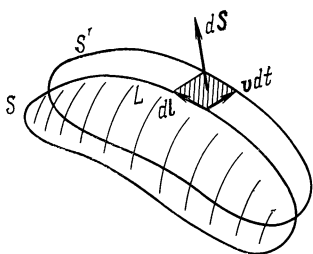


Рис. 1. Движение контура с плазмой и вмороженность поля

поверхности, рассматриваемый как вектор, направленный по нормали к поверхности. Как видно из рис. 1, поверхность  $S'$  можно считать состоящей из поверхности  $S$  и узкой ленты  $\Delta S$  шириной  $v \Delta t$ , соединяющей два контура. Следовательно, первое слагаемое в (1.8) можно представить в виде суммы интегралов по  $S$  и  $\Delta S$ . Первый из этих интегралов можно объединить со вторым интегралом в (1.8), и с точностью до малых величин

второго порядка их сумма равна  $\Delta t \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ . Что касается интеграла по  $\Delta S$ , то он может быть записан в виде интеграла по контуру  $L$ , так как элемент по-

верхности ленты  $\Delta S$  равен  $dS = -[dl, \mathbf{v} dt]$ . Таким образом:

$$\Delta \Phi = \Delta t \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} - \Delta t \int_L [\mathbf{v} \mathbf{B}] dl.$$

Но последний интеграл согласно известной формуле векторного анализа равен  $\int_S \text{rot}[\mathbf{v} \mathbf{B}] d\mathbf{S}$ . Устремляя  $\Delta t \rightarrow 0$  и учитывая уравнение для  $\mathbf{B}$ , получим  $d\Phi/dt = 0$ , т. е.  $\Phi = \text{const}$ . Поскольку это утверждение справедливо для любого контура  $L$ , движущегося вместе с веществом, то это и означает, что силовые линии магнитного поля как бы «приклеены» к идеально проводящей жидкости. Вмороженность силовых линий существенно упрощает картину поведения магнитного поля при движении идеальной плазмы.

### § 3. Равновесие плазмы

1. *Условие равновесия.* Плазма является весьма подвижной средой и в реальных условиях редко бывает спокойной. Прежде чем изучать ее движение, естественно рассмотреть более простую ситуацию, когда плазма находится в покое. Разумеется, мы могли бы представить себе неограниченную, заполняющую все пространство, однородную плазму, находящуюся в тепловом равновесии. Такая предельная идеализация часто используется при теоретическом анализе колебаний плазмы. Но если все же смотреть на вещи более реально, то мы должны ясно понимать, что в лабораторных условиях плазма всегда неоднородна. Для достижения равновесия неоднородной плазмы на нее должны действовать некоторые силы, препятствующие ее разлету. Ими могут быть либо силы со стороны магнитного поля в случае полностью ионизованной плазмы, либо трение о нейтральный газ, если плазма слабоионизованная.

Мы начнем рассмотрение с полностью ионизованной плазмы. При этом опять воспользуемся предельной идеализацией, а именно будем считать, что плазма представляет собой идеальный газ с уравнением состояния  $p = 2nT$ . В электрическом отношении будем считать ее идеальным проводником с бесконечной проводимостью.

Такая плазма, если к тому же допустить нулевую ее вязкость, называется идеальной.

Согласно (1.1) идеальная плазма может быть в равновесии только в том случае, если градиент ее давления уравновешен силой Ампера:

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}], \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле.

В предположении идеальной проводимости на плотность тока  $\mathbf{j}$  не накладывается никаких ограничений, кроме естественного условия непрерывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.10)$$

Магнитное поле  $\mathbf{B}$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  связаны уравнением Максвелла (1.3) и, кроме того, согласно (1.4)  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . Как легко видеть, из уравнения (1.9) вытекает, что

$$\mathbf{B} \nabla p = 0, \quad \mathbf{j} \nabla p = 0. \quad (1.11)$$

Эти соотношения можно рассматривать как условия постоянства давления вдоль силовых линий магнитного поля и линий тока: по этим направлениям сила со стороны магнитного поля не действует, и плазма может свободно расширяться вдоль направлений  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$ . Вместе с тем, поскольку  $\nabla p$  направлен перпендикулярно поверхности  $p = \text{const}$ , условия (1.5) означают, что силовые линии и линии тока должны лежать на поверхностях  $p = \text{const}$ .

В частности, если мы захотим изолировать плазму от стенок магнитным полем — такая проблема, как известно, возникла в связи с поисками путей достижения управляемой термоядерной реакции, — то поверхности  $p = \text{const}$  должны быть замкнутыми и вложенными друг в друга так, чтобы на границе плазмы давление обращалось в нуль, а внутри нее достигало максимального значения.

Уложить на эти поверхности силовые линии и линии тока так, чтобы нигде не возникало особых точек (соответствующих, например, «протыканию» поверхности  $p = \text{const}$  проводником с током), можно только в том случае, если они представляют собой систему вложенных друг в друга тороидальных поверхностей. Таким

образом, мы приходим к задаче о равновесии плазмы в торах, которая будет рассмотрена несколько позднее.

Выражая  $\mathbf{j}$  через  $\mathbf{B}$  с помощью (1.3) и пользуясь известным соотношением векторного анализа, уравнение равновесия (1.9) можно записать в виде

$$\nabla p + \nabla \frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}, \quad (1.12)$$

где второе слагаемое в левой части можно интерпретировать как градиент давления магнитного поля.

Еще более наглядная запись уравнения равновесия достигается, если ввести в рассмотрение единичный вектор  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$  вдоль магнитного поля:

$$\nabla p + \nabla_{\perp} \frac{B^2}{8\pi} = \frac{B^2}{4\pi} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} = \frac{B^2}{4\pi R} \mathbf{n}, \quad (1.13)$$

где  $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{h}(\mathbf{h} \nabla)$  — поперечный градиент,  $\mathbf{n}$  — нормаль к силовой линии,  $R$  — ее радиус кривизны. Из уравнения (1.13) видно, что магнитное поле оказывает давление  $B^2/8\pi$  в поперечном направлении и создает дополнительную силу  $\mathbf{B}$  в направлении вогнутости силовых линий вследствие их натяжения.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых конкретных равновесных конфигураций.

2. *Равновесие цилиндрического столба.* Мы начнем с самого простого случая равновесия плазмы при цилиндрической симметрии. Практически такое равновесие достигается в ограниченных по длине системах путем сжатия плазмы либо продольным магнитным полем ( $\theta$ -пинч), либо собственным полем протекающего по плазме тока ( $z$ -пинч). Теоретически удобно рассматривать плазменный шнур как не ограниченный по длине, пренебрегая явлениями на его торцах.

В цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии шнура, уравнение равновесия принимает вид

$$\frac{dp}{dr} + \frac{d}{dr} \frac{B_z^2}{8\pi} + \frac{B_{\theta}}{r} \frac{d}{dr} \frac{r B_{\theta}}{4\pi} = 0. \quad (1.14)$$

Так как мы имеем только одно уравнение для трех функций  $p, B_z, B_{\theta}$ , то произвол очень велик и существует большое разнообразие различных равновесных систем.



3. *θ-пинч*. Рассмотрим сначала случай, когда продольный ток  $j_z$  отсутствует и соответственно  $B_\theta = 0$ . В этом случае удержание плазмы достигается благодаря азимутальному току  $j_\theta$ , и поэтому соответствующую конфигурацию принято называть  $\theta$ -пинчем. При этом из (1.14) получаем

$$p + \frac{B_z^2}{8\pi} = \text{const}, \quad (1.15)$$

т. е. давление плазмы уравнивается магнитным давлением. Из (1.15) следует, что плазма обладает свойством диамагнетика: в области, занятой плазмой, поле ослабевает. Если  $p = B_0^2/8\pi$ , где  $B_0$  — поле вне плазмы, то внутри плазмы магнитное поле вообще отсутствует; удержание при этом достигается за счет тока, протекающего по поверхности плазмы. В другом случае так называемой плазмы низкого давления  $p \ll B^2/8\pi$  магнитное поле внутри плазмы ослабляется на малую величину

$$\delta B = -\beta B/2, \quad (1.16)$$

где  $\beta = 8\pi p/B^2$ . Если при этом давление плазмы внутри шнура постоянно, а затем резко падает до нуля на его границе, то, интегрируя уравнение равновесия  $dp/dr = -(1/c)j_\theta B_z$  поперек шнура и считая  $B \approx \text{const}$ , получим условие равновесия в виде

$$p = - (1/c)j_s B, \quad (1.17)$$

где  $j_s = \int j_\theta dr$  — поверхностная плотность тока.

Уравнение (1.17) имеет смысл баланса сил на границе: давление плазмы внутри шнура уравнивается силой Ампера, действующей на его границу.

4. *z-пинч*. В другом частном случае  $B_z = 0$  мы имеем дело с обычным пинч-эффектом, т. е. со стягиванием плазменного шнура собственным магнитным полем протекающего по нему тока с плотностью

$$j_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{d}{dr} (r B_\theta). \quad (1.18)$$

Умножим уравнение равновесия на  $r^2 dr$  и проинтегрируем его по  $r$  от 0 до  $\infty$ :

$$\int_0^\infty \frac{dp}{dr} r^2 dr = -\frac{1}{8\pi} (r^2 B_\theta^2)_0^\infty. \quad (1.19)$$

При  $r \rightarrow \infty$   $rB_\theta = 2I/c$ , где  $I$  — полный ток, протекающий по плазме, так что правая часть (1.19) равна  $I^2/2\pi c^2$ . Слева же после интегрирования по частям получим  $\int p \cdot 2r dr$ . Таким образом, окончательно находим следующее условие пинчевания, т. е. интегральное условие равновесия:

$$4c^2 N \bar{T} = I^2, \quad (1.20)$$

где  $N = \int 2\pi r n dr$  — погонное число электронов (на единицу длины шнура),  $\bar{T} = 1/2(\bar{T}_i + \bar{T}_e)$  — средняя температура. Соотношение (1.20) обычно называют условием Беннета.

При наличии продольного магнитного поля соотношение (1.20) должно быть дополнено членом, учитывающим разность давлений продольного поля снаружи и внутри шнура. В частности, если давление плазмы малое, то стягивание шнура собственным магнитным полем может компенсироваться за счет увеличения продольного магнитного поля внутри шнура. При этом возникает своеобразный парамагнетизм плазмы.

5. *Бессилловые конфигурации.* В проводящей плазме могут образовываться своеобразные равновесные конфигурации, когда давление плазмы пренебрежимо мало по сравнению с давлением магнитного поля. Как следует из уравнения равновесия (1.9), при этом ток должен течь вдоль магнитного поля. Магнитные конфигурации  $\mathbf{c} \nabla p = 0$  называются бессилловыми. В лабораторных условиях они осуществляются, когда велики потери энергии плазмой и она не нагревается. Бессилловые конфигурации нередко возникают на Солнце, когда магнитные поля, генерированные внутри Солнца, «всплывают» на его поверхность.

Естественно, что наиболее просто бессилловые конфигурации выглядят в случае цилиндрической симметрии. Так как при этом мы имеем одно уравнение для двух функций  $B_\theta(r)$ ,  $B_z(r)$ , то существует все еще довольно большой произвол в выборе конфигураций.

Мы рассмотрим здесь лишь один пример, представляющий интерес в связи с экспериментами по сильноточным разрядам, стабилизированным умеренным продольным полем. В таких разрядах давление плазмы невелико из-за различного рода аномальных потерь (усиленной диффузии и теплопроводности), так что

распределение полей практически бессилое. Оказывается, что экспериментально наблюдаемое распределение полей близко к бессилловому, у которого плотность тока пропорциональна полю, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{V} = \mu \mathbf{V}, \quad \mu = \text{const.} \quad (1.21)$$

Отсюда вытекает

$$B_z = B_0 J_0(\mu r), \quad (1.22)$$

$$B_\theta = B_0 J_1(\mu r),$$

где  $J_0, J_1$  — функции Бесселя.

Обозначим через  $a$  радиус плазменного шнура. Как видно из (1.22), по мере повышения  $\mu a$  продольное магнитное поле стягивается к оси, т. е. как бы появляется «парамагнетизм». Затем, по достижении значения  $\mu a = \alpha_0 \approx 2,4$ , т. е. первого корня  $J_0(x)$ , поле  $B_z$  обращается в нуль на границе шнура, а далее, при  $\mu a > \alpha_0$ , даже меняет свой знак.

Вместо  $\mu a$  удобно ввести интегральную величину

$$\Theta = 2\pi I a / c \Phi, \quad (1.23)$$

где  $I$  — полный продольный ток, а  $\Phi$  — продольный магнитный поток. Легко видеть, что  $\Theta = \mu a / 2$ . Обычно разряд заключен в кожух с достаточно высокой проводимостью, и поэтому  $\Phi = \pi a^2 B_a$ , где  $B_a$  — начальное значение продольного магнитного поля перед разрядом.

Согласно рассматриваемой бессилловой модели продольное поле на периферии разряда должно менять знак при переходе  $\Theta$  через значение  $\alpha_0/2$ . Именно такая картина появления отрицательных значений поля  $B_z$  на периферии разряда

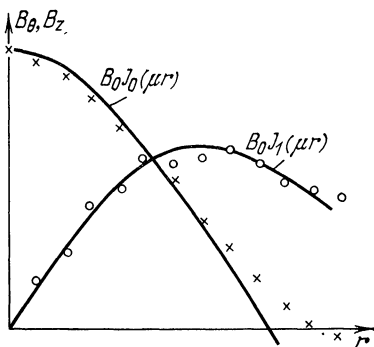


Рис. 2. Распределение полей в диффузном пинче

при увеличении  $\Theta$  наблюдается экспериментально (рис. 2). Достаточно хорошо совпадают и числовые значения величины  $\Theta$ , при которых происходит изменение знака поля: эксперимент дает  $\Theta \approx 1,4$ , а теория —  $\Theta \approx 1,2$ .

Почему в эксперименте наблюдается такая бессиловая конфигурация, было теоретически пояснено Дж. Тейлором [13]. Его аргументы сводятся к следующему. Будем исходить из того, что в диффузном пинче развивается довольно интенсивная магнитогидродинамическая турбулентность, как это показывают эксперименты. При такой турбулентности энергия магнитного поля и плазмы может переходить в тепловую энергию, а затем уноситься из шнура за счет потерь на стенку.

Плазма в таком шнуре обычно имеет достаточно высокую проводимость, и это накладывает определенные ограничения на допустимые движения в плазме. При идеальной проводимости изменения магнитного поля связаны условием вмороженности (1.7). Соответственно для вектор-потенциала магнитного поля  $\mathbf{A}$ , определяемого соотношением  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , вытекает

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = [\mathbf{v} \mathbf{B}] + \nabla \chi, \quad (1.24)$$

где  $\chi$  — произвольная скалярная функция.

Как можно показать, из соотношений (1.7), (1.24) следует, что интеграл  $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d\tau$ , взятый по любому объему, ограниченному силовыми линиями, не зависит от времени, т. е. является интегралом движения.

При конечной проводимости это утверждение становится неправильным, так как силовые линии получают возможность перезамыкаться. Но если проводимость достаточно высокая, то при таком перезамыкании магнитные поля меняются слабо, так что должен приблизительно сохраняться интеграл

$$K_0 = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \, d\tau,$$

взятый по всему объему плазмы: в этом интеграле происходит лишь перераспределение вкладов от отдельных силовых трубок, а сумма остается приблизительно постоянной.

Если искать минимум энергии магнитного поля при  $K_0 = \text{const}$ , то соответствующая вариационная задача приводит к бессиловому полю, задаваемому выражением (1.21) с  $\mu = \text{const}$ . Таким образом, наблюдаемое экспериментально бессиловое поле в диффузных пинчах связано с развитием мелкомасштабной магнитогидродина-

намической турбулентности, в которой энергия магнитного поля релаксирует к минимуму при  $K_0 = \text{const}$ . Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 6 п. 2 гл. 5.

6. *Тороидальная плазма в поле с замкнутыми силовыми линиями.* Рассмотренные выше цилиндрические равновесные конфигурации являются, разумеется, идеализацией: практически реализовать системы, бесконечно протяженные в одном направлении, невозможно. Однако такие равновесия можно осуществить приближенно, если плазменный шнур замкнут в торе с очень большим радиусом кривизны  $R$ . Здесь сразу же возникает вопрос о том, какое влияние оказывает на равновесие шнура его тороидальность. Чтобы выяснить это, мы рассмотрим сначала простой предельный случай, когда продольный ток отсутствует. При этом мы как бы искривляем однородное магнитное поле с плазменным цилиндром. В результате искривления поле перестает быть однородным: в круглом торе оно убывает обратно пропорционально расстоянию  $R$  от большой оси (оси симметрии) тора. Это следует из того, что при осевой симметрии поле равно  $B = 2I/cR$ , где  $I$  — полный ток, протекающий через круг радиуса  $R$ . Этот ток постоянен, если только мы не пересекаем витков обмотки.

Так как магнитное поле ослабевает к наружному обводу тора, то плазма, будучи диамагнетиком, должна выталкиваться в радиальном направлении. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим плазменную трубку, образующие которой совпадают с силовыми линиями, и допустим, что давление плазмы  $p$  однородно по сечению трубки и значительно меньше давления магнитного поля  $B^2/8\pi$ . Тогда, как мы установили в п. 3, магнитное поле будет очень слабо изменяться при пересечении границы плазмы. При этом согласно (1.17) давление плазмы уравнивается силой взаимодействия поверхностного тока  $j_s$  с магнитным полем  $B$ . Но в простой тороидальной геометрии в отсутствие продольного тока соотношению (1.17) удовлетворить нельзя. В самом деле, в силу сохранения заряда произведение поверхностного тока на длину силовой линии  $j_s \cdot 2\pi R$  должно оставаться постоянным. Поэтому на внутреннем обводе плазменной трубки поверхностный ток  $j_s$  должен быть несколько больше, чем на внешнем. Но магнитное поле  $B$  также больше на внутреннем обво-

де, и, следовательно, сила, действующая со стороны магнитного поля на плазменную трубку, должна давать некоторую равнодействующую, направленную наружу в сторону убывания магнитного поля.

Чтобы скомпенсировать силу выталкивания, можно пропустить поперек шнура параллельно оси симметрии тора небольшой ток  $\Delta j_s \sim (a/R)j_s$ , который даст силу, направленную в сторону оси тора (рис. 3); здесь  $a$  — поперечный размер плазменной трубки. Практически такой ток можно создать с помощью хорошо проводящей диафрагмы, которая, замыкая токи, «замораживает» силовые линии и не дает трубке двигаться по большому радиусу. Если магнитное поле  $B$  очень сильное, то поперечный ток  $\Delta j_s$  мал, и при хорошей проводимости плазмы вдоль поля диафрагма может эффективно замыкать поперечный ток  $\Delta j_s$  со всего шнура [15].

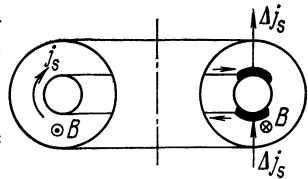


Рис. 3. Удержание тороидального шнура диафрагмой

7. *Ловушка с гофрированным магнитным полем.* Существует и другая возможность компенсации диамагнитного выталкивания в тороидальной системе с замкнутыми силовыми линиями. Она

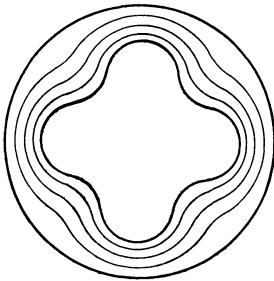


Рис. 4. Гофрированный тор

связана с отказом от осевой симметрии. Допустим, что с помощью дополнительных катушек создается такая конфигурация, что внутренняя силовая линия становится несколько длиннее наружной (рис. 4). Пусть опять давление плазмы мало и постоянно. Тогда условие равновесия границы имеет вид (1.17), где  $j_s$  — компонента поверхностного тока, нормальная к  $B$ , а следовательно, и к силовой линии. Из условия

сохранения электрического заряда имеем

$$\oint j_s dl = -cp \oint \frac{dl}{B} = \text{const.}$$

Так как  $p = \text{const}$ , то отсюда следует, что интеграл

$$U = \oint \frac{dl}{B}$$

вдоль любой замкнутой силовой линии на границе плазмы должен иметь одно и то же значение.

Этот результат легко обобщается на случай произвольного распределения давления плазмы. В самом деле, любое плавное распределение давления по некоторой координате  $\psi$ , нумерующей поверхности  $p = \text{const}$ , можно приближенно представить в виде набора многих ступенек. На каждой из таких ступенек величина  $U$  должна быть постоянной. Другими словами, для равновесия необходимо, чтобы давление  $p$  было постоянно на поверхности  $U = \text{const}$ , т. е.  $p = p(U)$ .

Если давление плазмы мало, то под величиной  $B$  в интеграле для  $U$  можно понимать вакуумное магнитное поле. В этом случае условие  $p = p(U)$  является необходимым и достаточным условием равновесия.

Таким образом, если произвести гофрировку магнитного поля, как показано на рис. 4, чтобы величина  $U$  имела одинаковое значение на некоторых тороидальных поверхностях, образованных силовыми линиями, то плазма может быть в равновесии.

8. *Равновесие плазмы в круглом торе.* Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда в плазменном шнуре имеются как продольное, так и азимутальное магнитные поля. Разумеется, в самой общей постановке задача о тороидальном равновесии плазмы весьма сложна, и решение ее требует громоздких математических выкладок. Однако существует класс задач, интересных в практическом отношении, когда тороидальная кривизна мала, т. е. малый радиус плазменного шнура  $a$  значительно меньше радиуса кривизны тора  $R_0$ . При этом тороидальный шнур близок к прямому и его равновесие можно исследовать по теории возмущений, принимая за нулевое приближение цилиндрический шнур и производя затем разложение по малому параметру  $a/R_0$ . Этим методом удастся рассмотреть широкий класс тороидальных систем [11]. Здесь мы рассмотрим в качестве примера только круглый тор с сильным продольным магнитным полем, что соответствует экспериментальным установкам «токамак».

Рассмотрим поперечное сечение плазменного шнура (рис. 5). Если в прямом шнуре магнитные поверхности в поперечном сечении представляли собой систему концентрических окружностей, то в торе эти окружности будут смещены от оси тора и несколько деформированы. В линейном по  $a/R_0$  приближении искажением окружностей можно пренебречь, так что тороидальность сказывается лишь в смещении окружностей. Это смещение обозначим через  $\Delta(r)$ , где  $r$  — малый радиус магнитной поверхности. Будем считать, что величина  $\Delta$  определена таким образом, что на внешнем проводящем кожухе радиуса  $b$  она обращается в нуль. В определении  $\Delta(r)$  и состоит основная задача нахождения тороидальной поправки к равновесию.

Наряду с  $r$  введем еще азимут  $\theta$  и продольную координату  $z$  — длину вдоль магнитной оси. Теперь это будут уже не цилиндрические координаты, а криволинейные координаты на торе (см. рис. 5), которые только при  $R_0 \rightarrow \infty$  переходят в цилиндрические.

Смещение  $\Delta$  магнитной поверхности по большому радиусу зависит от давления плазмы: с ростом давления  $\Delta$  увеличивается. Чтобы найти  $\Delta$ , нужно учесть, что в тороидальной геометрии компоненты магнитного поля не постоянны, а слабо зависят от  $\theta$ . Мы обозначим эти компоненты через  $B_\theta$  и  $B_T$ : компонента  $B_\theta$  в тороидальной геометрии называется полоидальной, а тороидальная компонента  $B_T$  является аналогом продольного поля  $B_z$  в геометрии прямого шнура.

Особенно легко определить зависимость от  $\theta$  для компоненты  $B_T$ . В самом деле, в силу осевой симметрии  $B_T = 2I/cR$ , где  $I$  — полный ток, протекающий через круг радиуса  $R$  — расстояния от оси симметрии. Но так как через магнитные поверхности ток не протекает, то величина  $I$  на магнитной поверхности постоянна, т. е. является функцией малого радиуса магнитной поверхности  $r$ . Наряду с координатой  $r$ , нумерующей магнитные поверх-

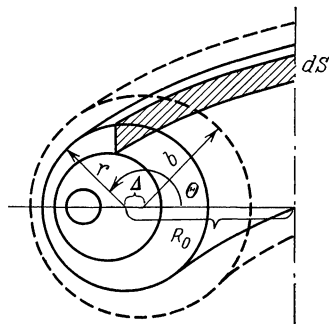


Рис. 5. Магнитные поверхности в торе



ности, удобно ввести в рассмотрение функцию полоидального магнитного потока  $\psi = \psi(r)$ :

$$\mathbf{B}_\perp = \frac{1}{R} [\mathbf{e}_\varphi \nabla \psi],$$

где  $\mathbf{B}_\perp$  — полоидальное магнитное поле,  $\mathbf{e}_\varphi$  — единичный вектор вдоль азимута  $\varphi$  цилиндрической системы координат  $R, \varphi, z$ . С учетом того что функции  $\psi, I$  являются постоянными на магнитных поверхностях, плотность тока можно представить в виде

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{R} \Delta^* \psi - \frac{2I'}{cR} [\mathbf{e}_\varphi \nabla \psi],$$

где оператор  $\Delta^* = R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , а  $I' = \frac{dI}{d\psi}$ .

С помощью этого выражения проекцию уравнения равновесия (1.9) можно записать в форме

$$\Delta^* \psi = -4\pi R^2 p' - \frac{4}{c^2} II',$$

где штрих означает производную по  $\psi$ . Это скалярное уравнение тороидального равновесия принято называть уравнением Грэда — Шафранова. При  $R_0 \rightarrow \infty$  оно переходит в уравнение равновесия цилиндрической плазмы. Сохраняя в нем малые члены порядка  $r/R_0$ , можно получить уравнение для смещения  $\Delta$  магнитных поверхностей.

Это же уравнение можно получить и более прямым путем непосредственно из уравнения равновесия в векторной форме. Учитывая, что в пренебрежении смещением  $\Delta$  величина  $R = R_0 - r \cos \theta$  (см. рис. 5), находим с точностью до членов первого порядка малости

$$B_r = B_r^0 \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta\right), \quad (1.25)$$

где  $B_r^0$  — значение продольного поля в нулевом приближении.

Азимутальная компонента поля  $B_\theta$  также несколько изменяется, так что можно положить

$$B_\theta = B_\theta^0 \left(1 + \frac{r}{R} \Lambda \cos \theta\right), \quad (1.26)$$

где  $\Delta(r)$  — пока неопределенная величина. Ее можно связать с  $\Delta(r)$ , если воспользоваться условием сохранения магнитного потока между двумя близкими магнитными поверхностями. Можно показать, что расстояние между близкими поверхностями равно

$$d\xi = dr - \cos\theta d\Delta = \left(1 - \frac{d\Delta}{dr} \cos\theta\right) dr$$

(см. рис. 5). Так как элемент поверхности (ленточки)  $dS$ , через который проходит азимутальный поток между близкими поверхностями, равен

$$dS = \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos\theta\right) 2\pi R_0 d\xi,$$

то из условия  $B_\theta dS = \text{const}$  легко находим

$$\frac{d\Delta}{dr} = \frac{r}{R_0} (\Lambda - 1). \quad (1.27)$$

Установив все необходимые геометрические соотношения, вернемся к уравнению равновесия. Удобно воспользоваться перпендикулярной поверхности  $p = \text{const}$  (т. е.  $r = \text{const}$ ) компонентой уравнения равновесия в форме (1.12). Учтем, что градиент по нормали равен

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \approx \left(1 + \frac{d\Delta}{dr} \cos\theta\right) \frac{\partial}{\partial r},$$

так как расстояние между близкими магнитными поверхностями

$$d\xi = \left(1 - \frac{d\Delta}{dr} \cos\theta\right) dr.$$

Следовательно, для нормальной компоненты поля имеем

$$\left(1 + \frac{d\Delta}{dr} \cos\theta\right) \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right) = \frac{\mathbf{n}}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}, \quad (1.28)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к магнитной поверхности.

Здесь для  $\mathbf{B}$  нужно учесть тороидальные поправки согласно (1.25), (1.26). Нетрудно видеть, что  $(B_T \nabla) B_T$  направлено к оси симметрии тора и его числовое значение равно  $B_T^2/R$ , так что  $\mathbf{n} (\mathbf{B}_T \nabla) \mathbf{B}_T = \cos\theta \cdot B_T^2/R$ . Что касается  $(\mathbf{B}_T \nabla) \mathbf{B}_\theta$  и  $(\mathbf{B}_\theta \nabla) \mathbf{B}_T$ , то они не имеют составля-

ющих по  $n$ , а  $n(\mathbf{B}_\theta \nabla) \mathbf{B}_\theta = -B_\theta^2 / r$ . Таким образом, уравнение (1.28) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( 4 \pi p + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{B_\theta^2}{r} = \left( \frac{d\Delta}{dr} \frac{B_\theta^2}{r} + \frac{B_r^2}{R} \right) \cos \theta, \quad (1.29)$$

где в правой части мы воспользовались уравнением равновесия в нулевом приближении и исключили  $dp/dr$ . Если подставить сюда (1.25), (1.26) и собрать малые первого порядка, то с учетом (1.27) можно получить уравнение для  $\Delta$ :

$$\frac{d}{dr} \left( r B_\theta^2 \frac{d\Delta}{dr} \right) = \frac{8 \pi r^2 dp}{R_0} - \frac{r}{R_0} B_\theta^2. \quad (1.30)$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что при  $r=0$   $d\Delta/dr=0$ , находим

$$\frac{d\Delta}{dr} = \frac{8 \pi (p - \bar{p}) - \overline{B_\theta^2}}{B_\theta^2} \frac{r}{R_0}, \quad (1.31)$$

где среднее значение

$$\bar{p} = \frac{1}{r^2} \int_0^r 2 p r dr$$

и аналогично определено  $\overline{B_\theta^2}$ . Вторым интегрированием отсюда нетрудно найти  $\Delta(r)$ . Тем самым задача о тороидальном равновесии полностью решается, так как  $B_\theta$  выражается через  $\Delta$ . Заметим, что согласно (1.26) величина  $\Delta$  зависит только от полоидальной компоненты поля  $B_\theta$ , а не от  $B_r$ .

Приведенные здесь соотношения, полученные впервые Шафрановым [10], хорошо описывают результаты экспериментов по равновесию плазмы в токамаках [23]. На рис. 6, например, представлены результаты измерения распределения плотности плазмы по сечению. Они наглядно показывают, как происходит смещение плазмы в торе в радиальном направлении. Величину  $\Delta$  иногда называют просто смещением Шафранова.

9. *Релаксированные равновесия в токамаке.* Уравнения магнитогидродинамического равновесия допускают широкий набор профилей давления. Однако эксперимент показывает, что в плазме токамака сами собой устанавливаются некоторые оптимальные профили распределения по радиусу давления, а также температуры и, следо-

вательно, плотности тока. Эти профили оказываются достаточно устойчивыми по отношению к внешним воздействиям. Поэтому естественно возникает мысль о том, что и в токамаке мы имеем дело с релаксированным состоянием, подобно тому что имеет место в пинче с обращенным полем.

Эксперимент показывает, что существует два типа релаксированных состояний. Они получили название *L*- и *H*-мод. *H*-мода соответствует лучшему удержанию плазмы, чем и объясняется название режимов: *L* — low, *H* — high. Наиболее легко реализуется *L*-мода, что же касается *H*-моды, то для ее достижения требуется обеспечить некоторые специфические условия на периферии плазмы. Так, например, впервые *H*-режим был обнаружен на установке Асдекс [22] при достаточно мощном дополнительном нагреве плазмы. Существенную роль при этом играло наличие полоидального дивертора, т. е. такой конфигурации магнитного поля, когда внутри некоторой тороидальной магнитной поверхности, называемой сепаратрисой, имеются вложенные друг в друга тороидальные поверхности, а за пределами сепаратрисной поверхности силовые линии разомкнуты и оканчиваются на стенках камеры. Наличие сепаратрисы дает возможность образования резкого скачка на периферии плазмы, так что профиль температуры в основной области удержания плазмы оказывается более широким.

Существование релаксированных *L*- и *H*-состояний плазмы можно объяснить, используя примерно ту же аргументацию, что и для диффузного пинча. Основная идея здесь опять состоит в том, что плазма релаксирует к состоянию с минимальной энергией при некоторых

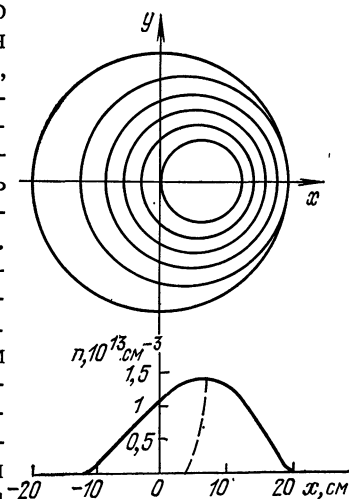


Рис. 6. Распределение плотности плазмы по сечению камеры в установке «токамак» [23]

дополнительных связях. Только при этом и сама энергия, и связи несколько отличаются от таковых для диффузного пинча.

Дело в том, что плазма токамака гораздо более устойчива, чем плазма диффузного пинча. Если в диффузном пинче достаточно легко развивается процесс перезамыкания силовых линий ко всему сечению плазменного шнура, то в токамаке аналогичный процесс реализуется только во время бурного срыва тока. В более спокойной фазе стабильного удержания плазмы в токамаке наблюдаются лишь небольшие винтовые возмущения — так называемые осцилляции Мирнова. Они могут приводить к перезамыканию силовых линий только вблизи рациональных магнитных поверхностей, когда величина  $q = m/n$ , где  $m, n$  — целые числа. На рациональных поверхностях силовые линии замыкаются сами на себя после нескольких оборотов, поэтому винтовые возмущения с тем же шагом, что и силовые линии, оказываются резонансными и приводят к расщеплению магнитных поверхностей с образованием так называемых магнитных островов.

Наличие магнитных островов служит причиной усиления транспортных процессов: во-первых, внутри самого острова перенос больше, а во-вторых, взаимодействуя друг с другом, острова порождают множество островков более высокого порядка. Все это приводит к тому, что и в плазме токамака может развиваться процесс релаксации к состоянию с более низкой энергией.

В токамаке продольное магнитное поле значительно больше полоидального поля, поэтому энергию продольного магнитного поля можно считать фиксированной. Следовательно, достаточно учесть лишь энергию полоидального магнитного поля и энергию плазмы:

$$\mathcal{E} = 2\pi \int \left( \frac{B_\theta^2}{8\pi} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) r dr. \quad (1.32)$$

Здесь  $p$  — давление плазмы,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Что касается связей, то их можно построить на основе приведенных выше рассуждений о возможности развития мелкоостровной структуры магнитных поверхностей.

Вблизи каждого острова одновременно образуются плоские участки на радиальных профилях  $p(r)$ ,  $j(r)$ ,  $q(r)$ , где  $j$  — плотность продольного тока. Поэтому при малых отклонениях от стационарного состояния эти ве-

личины можно считать функциями одна другой: например,  $p$ ,  $j$  можно считать функциями  $q$ . Другими словами, в вариациях, которые минимизируют энергию,  $p$  и  $j$  можно считать функциями  $q$ , что и играет роль наложенных связей.

Пренебрегая тороидальной кривизной, положим  $B_\theta = d\psi/dr$ , где  $\psi$  — полоидальный магнитный поток. При образовании острова величина  $\psi$  варьируется только вблизи острова, а вдалеке от него она остается той же самой в силу вмороженности магнитного поля в плазму на больших масштабах. Аналогично ведет себя и плотность тока  $j$ . Поэтому вариационная задача нахождения минимума энергии при заданной связи может быть сформулирована следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta \psi} (\mathcal{E} + \lambda I_p) = 0, \quad (1.33)$$

где  $\mathcal{E}$  — энергия, задаваемая выражением (1.32),  $\lambda$  — множитель Лагранжа,  $I_p = 2\pi \int j r dr$  — полный ток плазмы. При вариации (1.33) можно принять простейшие функциональные зависимости давления и плотности тока от величины  $q$ :  $p \sim q^{-2}$ ;  $j \sim q^{-2}$ . Оказывается, что с учетом соотношения

$$j = \frac{4\pi R_0 B_0}{c r q^2} \frac{dq}{dr}$$

эти простейшие зависимости являются и однозначными. В токамаках, как правило, величина  $q$  на магнитной оси близка к единице. С учетом этого обстоятельства вариационный принцип (1.33) приводит к однозначным профилям:

$$j = j_0 a_*^4 (r^2 + a_*^2)^{-2}, \quad p = p_0 a_*^4 (r^2 + a_*^2)^{-2},$$

где  $a_*^2 = 2 I_p R_0 / c B_T$ .

Эти профили соответствуют релаксированному состоянию  $H$ -режима. Строго говоря, профили  $j$ ,  $p$  нигде не обращаются в нуль. Это означает, что на периферии плазмы нужно обеспечить скачки температуры и давления, которые были бы достаточно устойчивы и не влияли бы на релаксацию энергии. Такие скачки могут, например, образовываться на сепаратрисной поверхности в токамаке с полоидальным дивертором. Если условия для такого скачка отсутствуют и периферийная плазменная

шуба оказывается достаточно холодной, то  $H$ -режим не осуществляется, т. е. полной релаксации плазмы не происходит. Однако и в этом случае более «шумной» плазмы условный минимум энергии  $\mathcal{E}$  опять может достигаться, но на более узком классе вариаций. Сузить класс вариаций можно, например, с помощью еще одной связи. Если считать, что этот более интенсивный процесс перезамыкания силовых линий более сходен с релаксацией диффузного пинча, то в качестве дополнительной связи можно выбрать условие сохранения спиральности  $K_0 = \text{const}$ . Соответствующая вариационная задача позволяет найти профили давления и плотности тока, плавно убывающие до нуля на границе плазмы  $r=a$ . Эти профили сходны с экспериментальными профилями  $L$ -режима. Тем самым как бы прослеживается непрерывный переход от диффузного пинча к  $H$ -режиму хорошего удержания плазмы в токамаке.

#### § 4. Двухжидкостная магнитная гидродинамика

1. *Уравнения двухжидкостной гидродинамики.* Всюду выше мы считали, что плазма покоится, т. е. ее скорость  $v=0$ . Но при этом неявно допускалось, что макроскопическая скорость  $v$  — это скорость ионов. Если по плазме протекает электрический ток плотностью  $j$ , то обе скорости — ионов  $v_i$  и электронов  $v_e$  — одновременно в нуль обратиться не могут просто потому, что  $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ .

Оценим скорость электронов  $v_e$ . Допустим, что продольный ток отсутствует. Тогда, как следует из уравнения равновесия (1.9), при наличии градиента давления по плазме должен протекать ток плотностью

$$j_{\perp} = \frac{c [\mathbf{h} \nabla p]}{enB}, \quad (1.34)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ . Если скорость ионов равна нулю, то отсюда получаем для скорости электронов

$$v_{e\perp} = - \frac{c [\mathbf{h} \nabla p]}{enB}. \quad (1.35)$$

По порядку величины эта скорость (которую мы условимся называть дрейфовой) равна  $v_{\perp} \sim cT/eVa \sim v_{Ti}\rho_i/a$ , где  $v_{Ti} = \sqrt{T/m_i}$  — средняя тепловая скорость ионов,  $\rho_i = v_{Ti}/\Omega_i \equiv v_{Ti}m_i/c/eB$  — их средний ларморовский ра-

диус,  $\Omega_i = eB/m_i c$  — ионная циклотронная частота,  $a$  — характерный размер плазмы. В сильном магнитном поле ларморовский радиус  $\rho_i$  очень мал и скорость  $v_{\perp}$  мала.

Но дело даже не в числовом значении скорости, а в том, что в рассмотренном выше приближении скорость электронов нигде не выступала в явном виде, и поэтому совершенно неясно, что за приближение мы сделали и какие эффекты при этом потеряли. Чтобы выяснить эти вопросы, приходится отказаться от взгляда на стационарное состояние как на равновесие и рассматривать его как некоторое стационарное течение и соответственно ввести в рассмотрение макроскопические (гидродинамические) скорости для электронов и ионов. Если при этом по-прежнему считать, что электроны и ионы представляют собой отдельные взаимно проникающие жидкости, то мы придем к так называемому приближению двухжидкостной гидродинамики. Микроскопической основой для такого приближения служит уже давно отмеченное Ландау [28] обстоятельство, что равновесное максвелловское распределение в каждой из компонент (электронной и ионной) устанавливается гораздо быстрее, чем происходит теплообмен между ними. С учетом небольшой силы трения между электронами и ионами уравнения двухжидкостной гидродинамики имеют вид

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \nabla p_i = en\mathbf{E} + \frac{en}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}] + \frac{m_e n}{\tau_e} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \quad (1.36)$$

$$m_e n \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \nabla p_e = -en\mathbf{E} - \frac{en}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}] - \frac{m_e n}{\tau_e} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i). \quad (1.37)$$

Здесь  $m_i$ ,  $m_e$  — массы соответственно ионов и электронов,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{v}_e$  — их скорости,  $p_i = nT_i$ ,  $p_e = nT_e$  — их давления, а  $T_i$ ,  $T_e$  — температуры,  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле,  $\tau_e$  — среднее время между электрон-ионными столкновениями. Как обычно, мы считаем, что плотности электронов и ионов равны (условие квазинейтральности).

В уравнениях (1.36), (1.37) под субстанциальными производными  $d\mathbf{v}/dt$  следовало бы понимать в одном случае  $\partial\mathbf{v}_i/\partial t + \mathbf{v}_i \nabla \mathbf{v}_i$ , а в другом  $\partial\mathbf{v}_e/\partial t + \mathbf{v}_e \nabla \mathbf{v}_e$ . Но поскольку масса электронов очень мала и в большинстве случаев ее можно считать нулевой, то во втором уравнении мы будем опускать инерционный член, так что  $d/dt$  всегда будет субстанциальной производной для ионов.



Складывая уравнения (1.36), (1.37) и пренебрегая инерцией электронов, получим уравнение движения одножидкостной гидродинамики

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}], \quad (1.38)$$

где  $p = p_e + p_i$ ,  $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ , а  $\mathbf{v}$  — скорость ионов.

В том же приближении уравнение (1.37) можно записать в виде

$$\nabla p_e = -en\mathbf{E} - \frac{en}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}] - \frac{en\mathbf{j}}{\sigma}, \quad (1.39)$$

где  $\sigma = e^2 n \tau_e / m_e$  — удельная проводимость. Это уравнение, устанавливающее связь между током и электрическим полем, можно рассматривать как обобщенный закон Ома. Можно сказать, что двухжидкостная природа плазмы учитывается дополнительными слагаемыми в законе Ома (1.39).

Уравнения движения (1.38), (1.39) должны быть дополнены уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{v} = 0 \quad (1.40)$$

и уравнениями Максвелла (в которых мы опять пренебрежем малым током смещения)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.41)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.42)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.43)$$

Кроме того, к ним следовало бы добавить уравнения теплового баланса для электронов и ионов, которые описывали бы изменение  $T_i$  и  $T_e$  со временем. Однако для малых промежутков времени, когда еще несущественны эффекты теплопроводности и тепловыделения, можно считать, что  $T_i$ ,  $T_e$  изменяются по адиабатическому закону.

Допустим, что плазма перемещается со скоростью, значительно большей дрейфовой,  $v_{\perp} \sim cT/eVa$ . Тогда в обобщенном законе Ома (1.39) второе слагаемое справа будет значительно больше  $\nabla p_e$  и члена такого же порядка величины  $(1/c)[\mathbf{j} \mathbf{B}]$ . Это значит, что в плазме должно появляться довольно большое электрическое поле  $\mathbf{E}$ . Со-

ответственно для таких движений можно пренебречь малыми вторым и третьим слагаемыми в правой части (1.39), и мы приходим к обычному закону Ома в одножидкостной магнитной гидродинамике. Таким образом, для быстрых движений справедлива одножидкостная гидродинамика. А как же быть с равновесием? Ведь в этом случае согласно одножидкостной модели ионы покоятся.

Чтобы разобраться в этом вопросе, постараемся сначала до некоторой степени устранить неравноправие электронов и ионов в рамках одножидкостной магнитной гидродинамики. Из уравнения движения (1.38) видно, что инерционный член  $m_i n dv/dt$  становится существенным по сравнению с другими только в том случае, если скорость ионов становится порядка звуковой. При малых  $v$ , например порядка дрейфовой скорости, этим членом можно пренебречь, и мы снова приходим к задаче о магнитогидродинамическом равновесии. Далее, даже с учетом вмороженности магнитного поля можно представить себе такие течения плазмы, при которых она скользит вдоль магнитных поверхностей, и магнитное поле при этом не меняется. Подбирая продольную компоненту скорости (вдоль магнитного поля), можно добиться, чтобы это течение было несжимаемым. В частности, скорость  $v$  можно выбрать равной  $v = j/en$  — этот вектор действительно лежит на магнитной поверхности и  $\text{div } nv = 0$ . Но в этом последнем случае весь ток будет переноситься ионами, а электроны будут покоиться.

В более общем случае существует довольно большой произвол для перераспределения электрического тока между ионами и электронами, так что на самом деле одножидкостная равновесная магнитогидродинамическая конфигурация соответствует целому классу стационарных состояний с медленным скольжением плазмы по магнитным поверхностям.

2. *Эффект Холла.* Последние рассуждения кажутся достаточно убедительными, однако у читателя может возникнуть вполне законный вопрос. Выше мы установили, что одножидкостная магнитная гидродинамика и следующее из нее условие вмороженности магнитного поля справедливы только для скоростей значительно больше дрейфовой. Почему же мы переносим их на течения с дрейфовыми скоростями и когда это можно делать?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно вернуться к обобщенному закону Ома, в котором явно учтена двухжидкостная природа плазмы. Предполагая, что проводимость очень велика, мы запишем его в виде

$$\nabla p_e = -en\mathbf{E} - \frac{en}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \quad (1.44)$$

Последнее слагаемое в этом уравнении можно назвать холловским — именно оно приводит к известному эффекту Холла в металлах и полупроводниках. Таким образом, обобщенный закон Ома по сравнению с обычным учитывает эффект Холла и градиент давления электронов.

Рассмотрим частный случай, когда температура электронов постоянна в пространстве,  $T_e = \text{const}$ . Тогда, вводя снова скорость электронов  $\mathbf{v}_e$ , уравнение (1.44) можно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}_e\mathbf{B}] - \nabla \left( \frac{T_e}{e} \ln n \right). \quad (1.45)$$

Если это выражение для электрического поля подставить в уравнение Максвелла (1.42) и учесть, что вихрь потенциального векторного поля равен нулю, то получим

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}_e\mathbf{B}]. \quad (1.46)$$

Это уравнение остается верным и в том случае, когда  $T_e$  является функцией плотности, например когда  $T_e$  и  $n$  постоянны на магнитных поверхностях.

Уравнение (1.46), как мы установили выше, означает, что силовые линии магнитного поля заморожены в среду, движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}_e$ , т. е. в данном случае — в электроны. Отсюда видно, что заметного расхождения между одножидкостной и двухжидкостной гидродинамикой можно ожидать в тех случаях, когда становится ощутимым различие между  $\mathbf{v}_e$  и  $\mathbf{v}_i$ .

Это утверждение можно сделать несколько более конкретным. Допустим, что мы имеем дело с типичным равновесием в приближении магнитной гидродинамики, когда давление  $p$ , а также температуры  $T_i$ ,  $T_e$  (в силу большой теплопроводности вдоль магнитного поля) постоянны на магнитных поверхностях. При этом электрический ток  $\mathbf{j}$  течет по магнитным поверхностям, и совершенно несущественно, в какую из компонент заморожено поле — в электронную или в ионную: магнитные поверхности все

равно останутся на месте. Значит, вполне справедливы рассуждения § 3.

Совсем другая ситуация возникает, когда точного равновесия нет. Даже если опять имеются магнитные поверхности и электроны не могут с них сдвинуться (в силу вмороженности потоков в электроны), отсутствие полного равновесия (т. е.  $p = nT \neq \text{const}$  на магнитной поверхности) должно привести к движению ионов с поперечными скоростями порядка дрейфовых. Ниже мы рассмотрим простейшие примеры такого движения.

3. *Стационарный ток при эффекте Холла.* Прежде чем перейти к рассмотрению стационарных состояний в двухжидкостной гидродинамике, постараемся сначала выяснить, как выглядит течение электронов при вмороженном в них магнитном поле, если ионы неподвижны. В качестве простейшего примера такой ситуации рассмотрим задачу о протекании тока с учетом эффекта Холла по жесткому гофрированному проводнику [29]. Впрочем, эта задача может быть сформулирована и в плазменном варианте как задача о неоднородном по длине пинче в очень разреженной плазме. Дело в том, что при достаточно малой плотности токовая скорость электронов  $v = -j/en$  может быть значительно больше скорости звука  $c_s = \sqrt{T/m_i}$ . В самом деле, из условия Беннета (1.20) следует, что  $v/c_s \sim \Pi_i^{-1/2}$ , где  $\Pi_i = Nm_i c^2/e^2$  — ионное погонное число. Если  $\Pi_i \ll 1$ , то  $v \gg c_s$ , и тогда в течение некоторого времени, пока шнур еще не успевает заметно изменить свою форму вследствие движения ионов со скоростями порядка  $c_s$ , движение электронной жидкости можно рассматривать при фиксированном распределении плотности ионов (а следовательно, и электронов). Заметим еще, что поскольку  $v$  имеет порядок величины дрейфовой скорости  $c_s r_i/a$ , то из условия  $v \gg c_s$  следует  $r_i \gg a$ , т. е. действием магнитного поля на ионы можно пренебречь (оно слишком слабо и не искривляет траектории ионов).

Итак, представим себе, что мы имеем неподвижный гофрированный шнур с током, в котором плотность  $n(r, z)$  является периодической функцией  $z$ , и рассмотрим вопрос о том, какие возможны стационарные течения электронов при заданной плотности  $n(r, z)$ .

Проводимость мы будем считать бесконечной и  $T = \text{const}$ , так что, по существу, нужно рассмотреть, как

влияет эффект Холла, т. е. вмороженность магнитного поля в электроны, на их скорость.

Предположим, что задача обладает осевой симметрией, т. е. все величины зависят только от двух переменных  $r$  и  $z$  в цилиндрической системе координат. Тогда из уравнения сохранения заряда

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r j_r + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (1.47)$$

следует, что компоненты плотности тока  $j_r$  и  $j_z$  могут быть выражены через произвольную скалярную функцию  $I(r, z)$ :

$$j_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial r}. \quad (1.48)$$

Из выражения для  $j_z$  вытекает, что

$$I = \int_0^r 2\pi r j_z dr, \quad (1.49)$$

т. е.  $I$  представляет собой функцию тока: она равна полному току, протекающему через круг радиуса  $r$ .

Учтем теперь условие вмороженности поля в электронную компоненту. В рассматриваемом нами случае  $B_z = B_r = 0$ , так что достаточно учесть только  $\theta$ -компоненту уравнения (1.46), которое в стационарном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} v_r B_\theta + \frac{\partial}{\partial z} v_z B_\theta = 0. \quad (1.50)$$

Если подставить сюда  $v = -j/en$  и выразить  $j$  через  $I$  согласно (1.48), а также учесть, что при осевой симметрии  $B_\theta = 2I/cr$ , то получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{I}{nr^2} \frac{\partial I}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{I}{nr^2} \frac{\partial I}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.51)$$

Если наружные производные применять к  $I$  или к внутренним производным от  $I$ , то соответствующие члены сократятся, так что достаточно дифференцировать лишь величину  $nr^2$ . Таким образом, находим

$$\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} nr^2 - \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} nr^2 = 0. \quad (1.52)$$

Отсюда следует, что величина  $I$  должна быть функцией только  $nr^2$ . Другими словами, эффект вмороженности магнитного поля в электронную компоненту накладывает существенное ограничение на электронный поток. Например, в случае однородного проводника с  $n = \text{const}$  линии тока являются прямыми. Поэтому, в частности, ток не может затекать в выпуклости гофрированного проводника — в область «тени», — он может течь только в центральной части, которую электроны «видят на просвет» [30].

4. *Равновесие плазмы в перекошенном магнитном поле.* Рассмотрим теперь более важный случай, когда магнитное поле велико и средний ларморовский радиус мал по сравнению с характерным размером плазменного шнура. При этом дрейфовая скорость также мала, однако могут существовать условия, когда ее следует учитывать. В самом деле, допустим, что некоторая магнитогидродинамическая система очень близка к равновесию, так что сила Ампера и градиент давления почти сбалансированы. При этом разлет плазмы за счет неполного баланса сил должен быть очень медленным, и если поперечная компонента скорости разлета становится сравнимой с дрейфовой, то одножидкостной магнитной гидродинамикой с упрощенным законом Ома пользоваться нельзя, обязательно следует учитывать эффект Холла.

В качестве первого примера такой ситуации рассмотрим плазменный шнур очень низкого давления с  $\beta = 8\pi r/B^2 \ll 1$  в перекошенном однородном магнитном поле (рис. 7, а). Предположим, что шнур является бесконечно протяженным, а магнитное поле равно  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ , где  $\mathbf{B}_0$  направлено вдоль оси шнура, а  $\mathbf{B}'$  — малая поперечная компонента поля. При  $B' \ll B_0$  плазма почти равновесна, но все же полного равновесия вдоль силовых линий нет. Поэтому в одножидкостном приближении плазма должна была бы разлетаться вдоль силовых линий со скоростью порядка скорости звука  $c_s$ . Внешне такой разлет выглядел бы как расширение шнура в направлении вдоль  $B'$  со скоростью  $v_{\perp} \sim (B'/B_0)c_s$ . Если эта скорость становится порядка или меньше дрейфовой, т. е. если

$$\frac{B'}{B_0} \lesssim \frac{\rho_i}{a}, \quad (1.53)$$

то следует пользоваться двухжидкостной гидродинамикой. Пусть  $B'$  не слишком мало, так что

$$\frac{B'}{B_0} > \frac{\rho_e}{a} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{\rho_i}{a}. \quad (1.54)$$

Тогда эффективная скорость разлета электронов  $B'/B_0) \sqrt{T_e/m_e}$  гораздо больше дрейфовой скорости. В этом случае можно считать, что у электронов успевает установиться равновесное распределение вдоль силовых

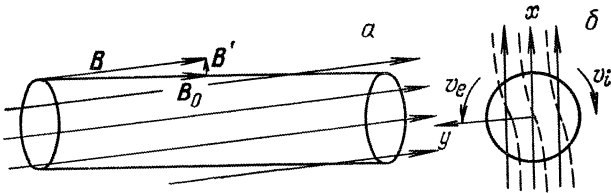


Рис. 7. Вращение плазмы в перекошенном однородном магнитном поле

линий. Соответственно в электронном уравнении движения можно пренебречь инерционным членом, и уравнение можно записать в виде (1.45). Умножая (1.45) на  $\mathbf{B}$ , получим

$$\mathbf{B} \mathbf{E} = -\mathbf{B} \nabla \left( \frac{T_e}{e} \ln n \right). \quad (1.55)$$

Но в стационарном состоянии электрическое поле является безвихревым:  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ . Следовательно, уравнение (1.55) можно проинтегрировать вдоль каждой силовой линии, и тогда получим

$$\phi = \frac{T_e}{e} \ln n + \phi_0, \quad (1.56)$$

где  $\phi_0$  — некоторая константа интегрирования, зависящая от силовой линии. В рассматриваемом нами случае однородного по оси  $z$  шнура  $\phi_0$  может зависеть лишь от координаты  $y$  (см. рис. 7, б, где изображен вид шнура с торца; ось  $z$  направлена вдоль шнура, ось  $x$  — вдоль поперечной компоненты поля  $\mathbf{B}'$ , а ось  $y$  — поперек магнитных поверхностей  $y = \text{const}$ , на которых лежат силовые

линии). В стационарном состоянии с цилиндрической симметрией  $\varphi_0$  следует положить равной нулю.

Таким образом, электрическое поле  $\mathbf{E}$  равно

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{T_e}{en}\nabla n. \quad (1.57)$$

Подставим это выражение в уравнение движения для ионов

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla n T_i = en\mathbf{E} + \frac{en}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \quad (1.58)$$

и пренебрежем малым инерционным членом. Тогда, умножая (1.58) векторно слева на  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ , найдем

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{c [\mathbf{h} \nabla p]}{enB}, \quad (1.59)$$

где  $p = n(T_e + T_i)$ ,

Таким образом, в стационарном состоянии шнур должен вращаться со скоростью, даваемой выражением (1.59), а азимутальная скорость электронов при этом равна нулю, поскольку они «приклеены» к силовым линиям магнитного поля.

Вращение плазмы прекращает ее разлет вдоль силовых линий. В самом деле, под действием продольной компоненты градиента давления ионы в верхнем положении (см. рис. 7,б) должны были бы ускоряться вправо, но, не успев заметно сдвинуться, они за счет вращения попадают на нижнюю сторону шнура, где они ускоряются влево. Если скорость вращения достаточно велика, т. е.  $c_s \rho_i / a \gg c_s B' / B_0$ , то смещение ионов на верхней и нижней сторонах компенсируются и разлета не происходит. Можно сказать, что благодаря эффекту Холла вместо равновесия устанавливается стационарное течение. Однако это течение оказывается неустойчивым.

5. *Вращение плазмы в  $\theta$ -пинче.* Описанная выше картина имеет место только в том случае, если давление плазмы очень мало, т. е.  $\beta \ll 1$ ; точнее, плотность кинетической энергии вращения плазмы  $m_i v^2 n / 2$  много меньше плотности энергии поперечного поля  $B'^2 / 8\pi$ , т. е.  $8\pi \rho / B'^2 \ll a^2 / \rho_i^2$ . В обратном предельном случае  $B'^2 \ll 8\pi \rho \rho_i^2 / a^2$  энергии поперечного поля не хватит для ускорения плазмы до скорости порядка дрейфовой, так что в первом приближении ионы можно считать неподвижны-



ми. Поскольку магнитное поле заморожено в электронную компоненту, силовые линии вместе с электронами начнут вращаться в сторону дрейфа электронов. Если для простоты пренебречь зависимостью угловой скорости вращения электронов от радиуса, то силовые линии начнут поворачиваться, как показано на рис. 8, а, б. После полуоборота плазмы ее внутреннее поперечное магнитное поле полностью отрывается от внешнего, так что поперечное поле снаружи от плазмы можно считать состоящим

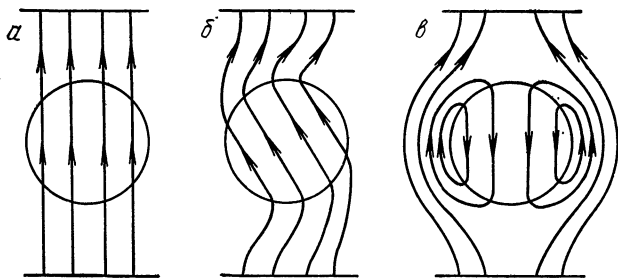


Рис. 8. Вращение плазмы в  $\theta$ -пинче из-за эффекта Холла при наличии небольшого поперечного поля

из поля внешних обмоток, не проникающего внутрь плазмы, и дипольного поля плазмы (рис. 8, в). Так как в первом полупериоде силовые линии были сцеплены с внешней обмоткой, то плазме передается момент количества движения и она приходит во вращение с некоторой азимутальной скоростью  $v_\theta$ . Порядок величины  $v_\theta$  можно найти, приравнявая кинетическую энергию вращения магнитной, т. е.  $v_\theta \approx B'(4\pi m_i n)^{-1/2}$ .

Этот механизм вращения плазмы за счет внешних рассеянных полей был рассмотрен Хайнсом [32, 33], а затем Тонеманом и Колбом [34] в связи с экспериментами на  $\theta$ -пинчах, где иногда наблюдается центробежная неустойчивость сжимаемого внешним магнитным полем плазменного шнура, что явно указывает на его вращение.

## § 5. Диффузия плазмы

1. *Плазма в однородном магнитном поле.* Всюду выше мы предполагали, что проводимость  $\sigma$  бесконечна, и только в этом приближении были получены все равновесные (или стационарные) состояния. Наличие конечной

проводимости приводит к медленной диффузии плазмы поперек магнитного поля. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим простой частный случай, когда плазма низкого давления ( $\beta \ll 1$ ) образует цилиндрически симметричный шнур в однородном магнитном поле (мы пренебрежем малым ослаблением поля за счет диамагнетизма плазмы). Тогда из азимутальной компоненты обобщенного закона Ома (1.39) получим

$$v_r = \frac{c}{B} E_\theta - \frac{c}{B\sigma} j_\theta = \frac{c}{B} E_\theta - \frac{c^2}{\sigma B^2} \frac{dp}{dr}. \quad (1.60)$$

Мы выразили здесь  $j_\theta$  через  $dp/dr$  с помощью уравнения равновесия. Если магнитное поле не меняется со временем, то  $E_\theta = 0$ , и согласно (1.60) радиальная скорость соответствует расширению плазмы. При  $T = \text{const}$  скорость  $v_r$  пропорциональна градиенту плотности, так что расширение плазмы носит характер диффузии с коэффициентом поперечной диффузии

$$D_\perp = \frac{2T}{m_e \Omega_e^2 \tau_e} = \beta \frac{c^2}{8\pi\sigma} = \frac{\rho_e^2}{\tau_e}, \quad (1.61)$$

где  $\beta = 8\pi r/B^2$ ,  $\Omega_e = eB/m_e c$  — электронная циклотронная частота,  $\tau_e$  — среднее время между электрон-ионными столкновениями,  $\sigma = e^2 n \tau_e / m_e$  — проводимость,  $\rho_e^2 = 2T/m_e \Omega_e^2$  — квадрат среднего электронного ларморовского радиуса. Выражение (1.61) для коэффициента диффузии имеет простой физический смысл: при каждом столкновении электрон перемещается в среднем на расстояние порядка ларморовского радиуса.

Если  $\beta$  не мало, то в процессе диффузии плазмы магнитное поле само изменяется и  $E_\theta \neq 0$ . При этом следует скорее говорить о взаимной «диффузии» магнитного поля и плазмы.

В другом предельном случае неподвижной плазмы мы приходим к задаче о скин-слое, т. е. о проникновении магнитного поля в проводящую среду с коэффициентом диффузии  $D_m = c^2/4\pi\sigma$ .

2. *Диффузия плазмы в торе.* При тороидальной геометрии процесс диффузии носит более сложный характер — он принимает форму своеобразной конвекции. Это связано с тем, что даже в стационарном магнитном поле

компонента электрического поля  $E_\theta$  отлична от нуля из-за перетекания тока вдоль винтовых силовых линий магнитного поля:

$$E_\theta = \frac{B}{B_\theta} \frac{\tilde{j}_\parallel}{\sigma_\parallel}. \quad (1.62)$$

Здесь  $\tilde{j}_\parallel$  — переменная (зависящая от  $\theta$ ) часть продольного тока, а  $\sigma_\parallel$  — продольная проводимость плазмы, которая, вообще говоря, отличается от входящей в (1.60) поперечной проводимости (согласно кинетической теории при кулоновских столкновениях в водородной и дейтериевой плазмах  $\sigma_\parallel \approx 2\sigma_\perp$ ). Величину  $\tilde{j}_\parallel$  можно найти из уравнения  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , выражая  $j_\perp$  через градиент давления с помощью уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{B_\theta}{rB} \frac{\partial \tilde{j}_\parallel}{\partial \theta} &= -\text{div } \mathbf{j}_\perp = -\text{div } \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \nabla p] = \\ &= \frac{2cr}{BR_0} \frac{dp}{dr} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Мы учли здесь, что  $B \approx B_T$  (считаем  $B_\theta^2 \ll B_T^2$ ); согласно (1.25)  $B_T$  хоть и слабо, но все же зависит от  $\theta$ . Из (1.62), (1.63) находим

$$E_\theta = \frac{2cB}{B_\theta^2 \sigma_\parallel} \frac{dp}{dr} \frac{r}{R_0} \cos \theta. \quad (1.64)$$

Введем в рассмотрение величину  $q = rB_T/R_0B_\theta$ , равную отношению числа оборотов силовой линии вдоль тора к числу оборотов по малому азимуту  $\theta$ . Подставляя выражение (1.64) для  $E_\theta$  в формулу (1.60) для  $v_r$ , мы видим, что электрическое поле  $E_\theta$  приводит к течению со скоростью в  $\frac{R}{r} q^2$  раз больше, чем диффузионная скорость в прямом цилиндре. Однако среднее значение этой скорости по азимуту обращается в нуль, т. е. в первом приближении поле (1.64) не приводит к соответствующей диффузии поперек магнитных поверхностей. Мы получаем как бы стационарную ламинарную конвекцию: плазма вытекает наружу от магнитной поверхности на внешнем обводе ( $\cos \theta < 0$ ) и втекает в эту поверхность на внутреннем обводе.

В следующем приближении вследствие этой конвекции все же возникает диффузионный поток. В самом де-

ле, чтобы найти средний поток через магнитную поверхность, нужно усреднить по  $\theta$  величину  $nv_r$  с весом  $1 - (r/R_0)\cos\theta$ , поскольку элемент тороидальной поверхности равен

$$dS = 2\pi R r d\theta = 2\pi R_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos\theta\right) r d\theta.$$

Производя усреднение с учетом малых членов порядка  $r^2/R_0^2$ , получим

$$\overline{nv_r} = -\frac{c^2}{\sigma_{\perp} B^2} \frac{dp}{dr} \left(1 + \frac{2\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} q^2\right). \quad (1.65)$$

Полагая  $\sigma_{\parallel} = 2\sigma_{\perp}$ , находим для коэффициента диффузии водородной или дейтериевой плазмы при тороидальной геометрии:

$$D_{\perp} = D_{\perp 0} (1 + q^2), \quad (1.66)$$

где  $D_{\perp 0}$  — коэффициент диффузии (1.61) в прямом магнитном поле. Формула (1.66) была впервые получена Пфиршем и Шлютером.

Все приведенные выше соотношения справедливы только в случае плотной плазмы, когда длина свободного пробега электронов и ионов значительно меньше характерной длины силовой линии  $qR_0$  и гидродинамическое приближение достаточно полно описывает поведение плазмы.

3. *Неоклассическая теория переносов.* Для целей управляемого термоядерного синтеза требуется высокотемпературная плазма с не очень высокой плотностью. В такой плазме длина свободного пробега частиц очень велика, так что можно говорить о сильно разреженной плазме. Если опять рассмотреть простой тор, т. е. геометрию токамака, то можно сказать, что практически интересен случай, когда длина свободного пробега электронов и ионов больше характерной длины силовой линии  $qR_0$ . Ясно, что при этом гидродинамическое приближение неприменимо. Теория переносов в разреженной тороидальной плазме при наличии сильного продольного магнитного поля была развита Галеевым и Сагдеевым [41]. В упрощенном изложении она выглядит следующим образом.

Рассмотрим прежде всего движение отдельной заряженной частицы в магнитном поле токамака. Как из-

вестно, заряженная частица в сильном однородном магнитном поле движется по траектории типа спирали: вдоль поля — со скоростью  $v_{\parallel}$ , а поперек поля — по окружности радиуса  $\rho = v_{\perp} / \Omega$ , где  $\Omega = eB/mc$  — циклотронная частота для частицы с зарядом  $e$ , массой  $m$ . Если учесть неоднородность поля, то возникают два дополнительных эффекта: величины  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  могут изменяться вдоль силовой линии и появляется возможность дрейфа поперек поля. В токамаке тороидальное поле значительно больше полоидального, поэтому именно неоднородность тороидального поля и является основной.

Рассмотрим поперечное сечение тороидальной магнитной поверхности с большим радиусом  $R_0$  и малым  $r$  (рис. 9, а). Будем опять считать, что величина  $\varepsilon = r/R_0$

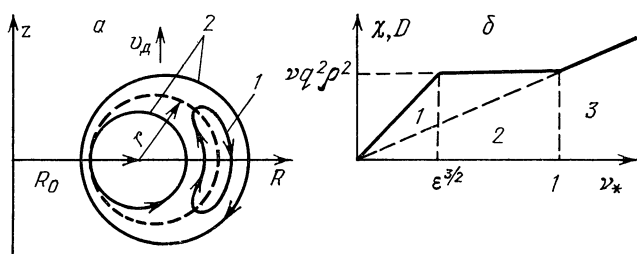


Рис. 9. а — Траектории запертой (1) и пролетной (2) частиц; б — зависимость коэффициентов переноса от безразмерной частоты столкновений  $\nu_* = \nu q R / v_T$

мала. Тогда на магнитной поверхности приближенно имеем  $B = B_0(1 - r \cos \theta / R_0)$ , т. е. магнитное поле несколько слабее на наружном обводе и сильнее на внутреннем обводе по сравнению с полем в точке  $R_0$ .

При движении заряженной частицы в магнитном поле ее полная энергия

$$\mathcal{E} = mv_{\parallel}^2 / 2 + mv_{\perp}^2 / 2$$

сохраняется. Кроме того, сохраняется поперечный адиабатический инвариант, имеющий смысл магнитного момента:

$$\mu_{\perp} = mv_{\perp}^2 / 2B = \text{const.}$$

Отсюда видно, что поперечная кинетическая энергия

возрастает, а продольная энергия убывает при движении частицы в сторону более сильного магнитного поля. Если продольная энергия достаточно мала по сравнению с поперечной, то может возникнуть зеркальный эффект: частица отражается от сильного магнитного поля. Определим точнее, когда он возникает.

Пусть в точке  $\theta=0$ , т. е. на наружном обводе тора, скорости равны соответственно  $v_{\parallel}^0$  и  $v_{\perp}^0$ . При движении в сторону более сильного поля поперечная энергия будет возрастать пропорционально полю. Поскольку полная энергия сохраняется, то продольная энергия будет изменяться пропорционально величине  $v_{\parallel}^2 = v_{\parallel}^{02} - \epsilon(1 - \cos\theta)v_{\perp}^{02}$ . Отсюда видно, что при условии  $v_{\parallel}^{02} < 2\epsilon v_{\perp}^{02}$  частицы отражаются от сильного магнитного поля и не достигают внутреннего обвода тора. Такие частицы называют запертыми. Частицы с  $v_{\parallel}^{02} > 2\epsilon v_{\perp}^{02}$  называют пролетными: они совершают инфинитное движение вдоль силовых линий.

Учтем теперь дрейф частиц в неоднородном магнитном поле. Если рассматривать частицу как ларморовский кружок, движущийся со скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль силовой линии, то можно сказать, что на такую частицу действуют две силы вдоль большого радиуса: центробежная  $mv_{\parallel}^2/R$  и сила диамагнитного выталкивания ларморовского кружка

$$-\mu_{\perp} \nabla B = mv_{\parallel}^2/2R.$$

Сила  $F_{\perp}$ , действующая на частицу в сильном магнитном поле  $B$ , приводит к дрейфу частицы поперек магнитного поля со скоростью  $v_d$  такой величины, чтобы  $F_{\perp}$  была уравновешена силой Лоренца:

$$F_{\perp} = ev_d B/c.$$

Другими словами,

$$v_d = \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2}{\Omega R}.$$

Скорость дрейфа направлена вдоль вертикальной оси симметрии тора. Это означает, что в верхней половине тора частица выдрейфовывает наружу по отношению к магнитным поверхностям, а в нижней половине —

внутри. Нетрудно видеть, что запертая частица описывает в проекции на поперечное сечение тора траекторию типа «банана» (см. рис. 9,а). Ширина «банана»  $\Delta = v_{dr}t$ , где  $v_{dr}$  — проекция дрейфовой скорости на малый радиус, а  $t$  — время пролета одной половинки «банана». Для типичной запертой частицы со средней тепловой энергией и продольной скоростью  $v_{\parallel} \approx \varepsilon v_{\perp}$  ширина «банана» оказывается порядка  $\Delta \approx q\rho/\varepsilon$ , где  $\rho$  — средний ларморовский радиус,  $q$  — коэффициент запаса устойчивости (напомним, что характерная длина участка силовой линии на внешнем обводе пропорциональна  $qR_0$ ).

Траектории пролетных частиц также отклоняются от магнитных поверхностей. У частиц, только-только ставших пролетными (см. рис. 9,а), отклонения достигают того же масштаба, что и у запертых. Однако для типичной пролетной частицы с продольной скоростью порядка поперечной это отклонение составляет величину всего лишь порядка  $q\rho$ .

Зная траектории частиц, можно оценить коэффициенты переноса. Удобно начать с предельного случая сильно разреженной плазмы, когда длина свободного пробега очень велика по сравнению с  $qR_0$ . Оказывается, что при этом главный вклад в переносы дают запертые частицы, так что условно можно говорить о теплопроводности и диффузии на «бананах». Область очень редких столкновений выделена на рис. 9,б цифрой 1. Цифрой 3 отмечена гидродинамическая область достаточно плотной плазмы, когда длина свободного пробега меньше  $qR_0$ , а область 2 относится к промежуточным частотам столкновений. По оси ординат рис. 9,б отложен соответствующий коэффициент, а по оси абсцисс — частота столкновений  $\nu$ , отнесенная к средней пролетной частоте  $\nu_T = v_T/qR_0$ , где  $v_T$  — средняя тепловая скорость. Таким образом, условие  $\nu/\nu_T = 1$  означает равенство средней длины пробега и величины  $qR_0$ . Соответственно эта точка разграничивает области редких и частых столкновений.

Чтобы оценить коэффициенты переноса в области очень редких столкновений, нужно учесть, что столкновения могут перевести запертую частицу в свободную (и наоборот) и при этом характерное смещение частицы составляет величину порядка  $\Delta$ . Кроме того,

очевидно, что для такого перехода достаточно изменить продольную скорость запертой частицы на величину порядка  $v_{\parallel} \sim \sqrt{\varepsilon} v_{\perp}$ , т. е. малую по сравнению с  $v_{\perp}$ . Для типичной частицы это означает изменение продольной скорости порядка  $\sqrt{\varepsilon}$  от тепловой. Напомним, что кулоновские столкновения в силу своего дальнедействующего характера приводят к процессу диффузии в пространстве скоростей. Поэтому можно ввести эффективную частоту столкновений  $\nu_{\text{eff}} \approx \nu/\varepsilon$ , которая определяет темп переброса частиц из запертых в пролетные путем диффузии по продольной скорости на интервале порядка  $v_{\parallel}/\sqrt{\varepsilon}$ . Учитывая, что доля запертых частиц составляет величину порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ , можно оценить температуропроводность  $\chi$  как  $\sqrt{\varepsilon} \Delta^2 \nu_{\text{eff}} = \varepsilon^{-3/2} \nu q^2 \rho^2$ .

Это выражение относится как к ионной, так и к электронной температуропроводностям, достаточно лишь подставить соответствующие значения для  $\nu$  и  $\rho$ . Коэффициент диффузии имеет величину того же порядка, что и электронная температуропроводность, т. е. существенно меньше полной температуропроводности.

Выражением для коэффициентов переносов в области очень редких столкновений, т. е. диффузии на «бананах», можно пользоваться только до значений  $\nu_{\text{eff}}$ , сравнимых с частотой колебаний запертых частиц между пробками по порядку величины, равной  $\sqrt{\varepsilon} v_{\perp}/q R_0$ . Таким образом, граница между областями 1 и 2 лежит при  $\nu/\nu_{\text{T}} \approx \varepsilon^{3/2}$ , а соответствующее значение  $\chi$  в этой точке приближенно равно  $\nu_{\text{T}} q^2 \rho^2$ . Очевидно, что примерно такое же значение  $\chi$  достигается в точке  $\nu = \nu_{\text{T}}$ , т. е. на границе между областями 2 и 3. Следовательно, в области 2 промежуточных столкновений величина  $\chi$  практически не зависит от частоты столкновений. Поэтому эту область частот иногда называют областью плато. Область частых столкновений 3 называют также областью Пфирша — Шлютера, имея в виду соотношение (1.66) для коэффициента диффузии. Полный график зависимости коэффициентов переноса от частоты столкновений представлен на рис. 9,б.

Неоклассическая теория не только показала наличие сложной зависимости коэффициентов переноса от



частоты столкновений, но и указала на существование некоторых новых эффектов. Один из них, пожалуй наиболее интересный, получил название бутстреп-тока. Речь идет о возможности поддержания тока в токамаке за счет диффузионного расширения плазмы [25а, 25б]. Нетрудно показать, что при достаточно большом давлении плазмы по сравнению с давлением полоидального магнитного поля неоклассический коэффициент диффузии превышает коэффициент диффузии магнитного поля  $c^2/4\pi\sigma$ . Плазма при этом расширяется быстрее, чем магнитное поле проникает в плазму. Соответственно диффузионный поток может поддерживать ток. Можно рассуждать и по-другому: запертые «бананы» из-за тороидального выталкивания создают дрейфовый тороидальный ток

$$j_d \sim \varepsilon^{3/2} \frac{c}{B_0} \frac{dp}{dr}.$$

Из-за столкновений с эффективной частотой  $\nu_{\text{eff}} \sim \nu/\varepsilon$  запертые частицы передают момент пролетным частицам, которые теряют его на ионах с частотой порядка  $\nu$ . Соответственно ток пролетных частиц составляет величину  $j \sim -\varepsilon^{1/2} \frac{c}{B_0} \frac{dp}{dr}$ , растущую с давлением  $p$ . Если обеспечить непрерывный диффузионный поток плазмы к периферии с помощью, например, инъекции крупинки холодного вещества в центр плазменного шнура, то можно воспрепятствовать затуханию тока из-за конечного сопротивления плазмы. Плазма как бы сама поддерживает ток, магнитное поле которого ее удерживает. Вспомнив эпизод из книги Л. Кэрролла об Алисе, которая смогла удержать себя в воздухе за тесемки ботинок, английские физики и назвали этот эффект бутстреп-током.

4. *Амбиполярная диффузия слабоионизованной плазмы.* Если в полностью ионизованной плазме вопрос о равновесии сводится к анализу возможности удержания одной лишь плазмы магнитным полем, то при наличии третьей компоненты — нейтрального газа — он усложняется необходимостью рассмотрения поведения также и нейтрального газа. Однако существует интересный предельный случай слабоионизованной плазмы, когда степень ионизации настолько мала, что давление плазмы

много меньше (давления нейтрального газа и электронные столкновения не играют никакой роли по сравнению со столкновениями заряженных частиц с молекулами нейтрального газа. В этом случае газ представляет собой неподвижную однородную среду, в которой диффундируют электроны и ионы. Соответственно задача о стационарном или медленно изменяющемся состоянии плазмы сводится тогда к исследованию ее диффузии.

Рассмотрим сначала случай без магнитного поля. Будем считать, что электроны и ионы имеют максвелловское распределение с температурами  $T_e$  и  $T_i$  соответственно. Для каждой из этих компонент уравнения движения имеют вид

$$\nabla p_j = e_j n \mathbf{E} - \frac{m_j}{\tau_j} n \mathbf{v}_j, \quad (1.67)$$

где  $p_j = nT_j$  — давление,  $e_j$  — заряд,  $m_j$  — масса,  $\tau_j$  — среднее время между столкновениями с молекулами нейтрального газа,  $v_j$  — средняя скорость частиц сорта  $j$ . Из этого уравнения при  $T_j = \text{const}$  находим

$$\mathbf{q}_j \equiv n \mathbf{v}_j = -D_j \nabla n + \frac{e_j}{e} n \mu_j \mathbf{E}, \quad (1.68)$$

где  $\mathbf{q}_j$  — поток частиц,  $D_j = T_j \tau_j / m_j$  — коэффициент диффузии,  $\mu_j = e \tau_j / m_j$  — подвижность частиц сорта  $j$  (мы будем считать  $\mu_j$  положительной как для электронов, так и для ионов, при этом знак  $e_j$  учитывается в (1.68) множителем  $e_j/e$ ). После подстановки выражения (1.68) в уравнение непрерывности получаем уравнение диффузионного типа

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_j \Delta n - \text{div} \frac{e_j}{e} n \mu_j \mathbf{E}. \quad (1.69)$$

Рассмотрим, например, цилиндрически симметричный столб плазмы. Тогда  $\mathbf{E}$  имеет только радиальную компоненту, которую можно исключить, если умножить уравнение (1.69) для электронов на  $\mu_i$ , а для ионов — на  $\mu_e$  и затем сложить их. В результате получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \Delta n, \quad (1.70)$$

где величина

$$D_a = \frac{D_e \mu_i + D_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e}, \quad (1.71)$$

называется коэффициентом амбиполярной диффузии. Обычно  $\mu_e \gg \mu_i$ , так что  $D_a \approx D_i + (\mu_i/\mu_e)D_e$ . Физически коэффициент  $D_a$  выступает как результат возникновения в плазме радиального электрического поля  $E_r$ , которое удерживает электроны и не дает им «убегать» от ионов, но при этом «подталкивает» ионы.

Если плазма заключена в цилиндр радиуса  $a$ , в пределах которого она рекомбинирует, то все решения уравнения (1.70) будут затухающими. Решение с максимальным временем затухания  $\tau$  при граничном условии  $n(a) = 0$  (условие Шоттки) имеет вид  $n = n_0 J_0(\alpha_0 r/a)$ , где  $n_0$  — плотность на оси,  $J_0$  — функция Бесселя нулевого индекса,  $\alpha_0 \approx 2,4$  — первый корень  $J_0(x)$ , причем  $1/\tau = D_a \alpha_0^2/a^2$ .

Соотношение (1.71) легко обобщается на случай присутствия продольного магнитного поля; для этого вместо  $D_j$ ,  $\mu_j$  достаточно подставить их «замагниченные» значения  $D_{\perp j} = D_j / (1 + \Omega_j^2 \tau_j^2)$ ,  $\mu_{\perp j} = \mu_j / (1 + \Omega_j^2 \tau_j^2)$ . Так, например, при  $\Omega_e \tau_e \gg 1$ ,  $\Omega_i \tau_i < 1$  получаем

$$D_{\perp} = \frac{D_a}{1 + (\mu_i/\mu_e)(\Omega_e \tau_e)^2} \cdot \quad (1.72)$$

В сильных полях  $D_{\perp}$  убывает с полем как  $1/B^2$ .

5. *Диффузия тороидальной слабоионизованной плазмы.* Рассмотрим теперь слабоионизованную плазму в тороидальном баллоне радиуса  $a$  и радиуса кривизны  $R$  и предположим, что магнитное поле направлено вдоль баллона. Полностью ионизованная плазма в таком поле не удерживается — она выбрасывается в сторону убывания магнитного поля. Но для слабоионизованной плазмы полного равновесия не требуется: все равно она диффундирует поперек поля за счет столкновений. Наша задача состоит лишь в том, чтобы учесть влияние тороидальности на диффузию.

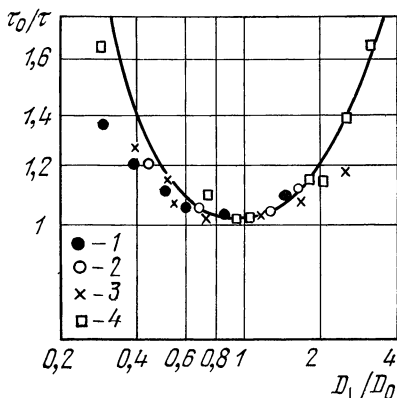
Направим ось  $x$  в сторону убывания магнитного поля и рассмотрим некоторую плазменную трубку объема  $V$ , образующие которой совпадают с силовыми линиями магнитного поля. Такая трубка выталкивается вдоль  $x$  с некоторой силой  $F$ . Чтобы найти  $F$ , учтем, что в отсутствие трения о нейтральный газ плазменная трубка может перемещаться только таким образом, что заключенный в нее магнитный поток  $\Phi = BS$  ( $S$  — площадь попе-

речного сечения трубки) остается постоянным. Но при смещении на  $dx$

$$0 = d\Phi = S \frac{dB}{dx} dx + B dS = -\frac{BS}{R} dx + B dS,$$

где  $R$  — радиус кривизны силовой линии. Отсюда  $dS = (S/R) dx$ . А так как длина трубки  $2\pi R$  увеличивается при этом на  $2\pi dx$ , то объем трубки изменяется на  $dV =$

Рис. 10. Зависимость времени жизни распадающейся плазмы от коэффициента диффузии в тороидальной трубке (газ — гелий,  $R=28$  см,  $a=0,3$  см) при давлениях  $p$ : 1 — 0,025, 2 — 0,040, 3 — 0,055, 4 — 0,120 мм рт. ст.



$= (2V/R) dx$ . Приравнявая работу расширения  $pdV$  величине  $Fdx$ , находим обобщенную силу  $F$ , соответствующую координате  $x$ :  $F=2pV/R$ .

Для смещения по  $x$  не требуется изменения потока  $\Phi$  через сечение трубки. Поэтому сила  $F$  приведет к движению плазмы такому же, как и в отсутствие магнитного поля, т. е. со скоростью  $v_x=2D_a/R$ , где  $D_a$  — амбиполярный коэффициент диффузии. Это легко усмотреть, если сравнить  $v_x$  с амбиполярным потоком  $q=nv = -D_a \nabla n$ , возникающим под действием градиента давления  $T \nabla n$ . Учитывая, кроме того, диффузию поперек магнитного поля с коэффициентом  $D_\perp$ , мы получим уравнение диффузии в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{2D_a}{R} \frac{\partial n}{\partial x} = D_\perp \Delta n. \quad (1.73)$$

Здесь второе слагаемое слева описывает перенос плазмы как целого к наружной стенке.

Если, например, исследуется распад плазмы, т. е. убывание ее плотности со временем вследствие диффузии к стенкам, то при  $t \rightarrow \infty$  достаточно учесть лишь од-

но экспоненциально убывающее как  $\exp(-t/\tau)$  решение уравнения (1.73) с максимальным временем жизни  $\tau$ . Это решение имеет вид

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{D_a}{R D_{\perp}} x\right) J_0\left(\frac{r \alpha_0}{a}\right), \quad (1.74)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого индекса, а  $\alpha_0 \approx 2,4$  — ее первый корень. Постоянная распада дается выражением

$$\frac{1}{\tau} = \frac{D_{\perp} \alpha_0^2}{a^2} + \frac{D_a^2}{R^2 D_{\perp}}. \quad (1.75)$$

Как видим, постоянная распада  $1/\tau$  сначала убывает, а затем начинает возрастать по мере увеличения магнитного поля, т. е. с уменьшением  $D_{\perp}$ . Формула (1.75) хорошо согласуется с результатами экспериментов по распаду плазмы в тороидальном магнитном поле [40] (рис. 10).

## ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

## § 1. Альвеновские и магнитозвуковые волны

1. *Уравнение малых колебаний.* Дальнедействующие силы между заряженными частицами приводят к возникновению своего рода упругости плазмы, благодаря которой в ней могут распространяться различного рода волны. Среди них выделяются прежде всего линейные волны. Амплитуда таких волн настолько мала, что они распространяются независимо друг от друга. Другими словами, произвольные колебания малой амплитуды могут быть представлены в виде суперпозиции отдельных волн — собственных колебаний данной среды.

Общий принцип теоретического рассмотрения линейных колебаний состоит в следующем. В рамках того или иного приближения, которому соответствует определенная система уравнений, описывающих поведение рассматриваемого объекта, находится некоторое стационарное состояние. Затем на это состояние накладывается возмущение. В предположении малости возмущения уравнения движения линеаризуются. Полученная таким образом система линейных уравнений и описывает малые колебания.

Рассмотрение малых колебаний плазмы естественно начать в одножидкостном магнитогидродинамическом приближении. Выпишем здесь еще раз уравнения магнитной гидродинамики в предположении идеальной проводимости:

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}], \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (2.3)$$

К этой системе уравнений следовало бы добавить уравнение переноса тепла для определения температуры, а следовательно, и давления плазмы  $p = n(T_e + T_i)$ . Но мы для простоты допустим, что давление определяется плотностью плазмы, а именно:

$$\frac{p}{n^\gamma} = \text{const.} \quad (2.4)$$

Например, при  $\gamma = 1$  уравнение (2.4) эквивалентно изотермичности плазмы, а при  $\gamma = 5/3$  оно отвечает адиабатическим колебаниям плазмы. В общем случае (2.4) можно рассматривать как некоторое уравнение состояния типа политропы.

Рассмотрим теперь самое простое равновесное состояние, предполагая, что плазма равномерно заполняет все пространство с плотностью  $n_0$  и давлением  $p_0$ , а магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  однородно и направлено вдоль оси  $z$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$ . Скорость плазмы считаем равной нулю,  $v_0 = 0$ .

Наложим на это равновесное состояние малое возмущение  $\mathbf{v}'$ ,  $p'$ ,  $n'$ ,  $\mathbf{B}'$  и линеаризуем уравнения (2.1) — (2.4), т. е. оставим лишь те слагаемые, которые содержат малые величины в первой степени. Тогда вместо (2.1) — (2.4) получим

$$m_i n_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}', \mathbf{B}_0], \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \text{div } n_0 \mathbf{v}' = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v}', \mathbf{B}_0], \quad (2.7)$$

$$p' = \frac{\gamma p_0 n'}{n_0}. \quad (2.8)$$

Эту систему уравнений можно существенно упростить, если вместо скорости  $\mathbf{v}'$  ввести в рассмотрение смещение плазмы из положения равновесия  $\xi$ , связанное с  $\mathbf{v}'$  естественным соотношением

$$\mathbf{v}' = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Если подставить это выражение для  $\mathbf{v}'$  в уравнения (2.6), (2.7), то после интегрирования по времени, т. е. попро-

сту после отбрасывания производных по времени, получим

$$n' = -\operatorname{div} n_0 \xi, \quad \mathbf{V}' = \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0]. \quad (2.10)$$

Смысл первого из этих соотношений совершенно очевиден. Оно означает просто, что плотность в данной точке уменьшается пропорционально вытекшему из объема количеству жидкости.

Рассмотрим теперь второе из соотношений (2.10). Заметим прежде всего, что в (2.10) входит фактически лишь поперечная компонента смещения  $\xi_{\perp}$ , так как векторное произведение коллинеарных векторов  $\xi_{\parallel}$  и  $\mathbf{B}_0$  равно нулю. Воспользовавшись известным соотношением векторного анализа

$$\operatorname{rot} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} \quad (2.11)$$

и учитывая, что  $B_0 = \operatorname{const}$ , запишем выражение для  $\mathbf{V}'$  в виде

$$\mathbf{V}' = -\mathbf{B}_0 \operatorname{div} \xi_{\perp} + B_0 \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial z}. \quad (2.12)$$

Первое слагаемое здесь имеет точно такой же смысл, как и выражение для  $n'$ . Оно показывает, что при расширении вещества в плоскости  $(x, y)$  силовые линии раздвигаются, так что магнитное поле вдоль прежнего направления ослабевает (рис. 11, а). Второе слагаемое в (2.12)

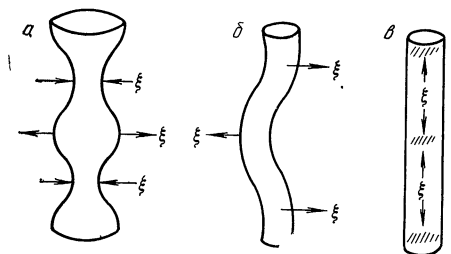


Рис. 11. Смещение плазмы при магнитозвуковых (а), альвеновских (б) и ионно-звучковых (в) колебаниях

также имеет простой смысл. Если  $\xi_{\perp}$  изменяется с изменением  $z$ , то силовые линии магнитного поля, замороженного в вещество, несколько искривляются (рис. 11, б). В результате у магнитного поля появляется поперечная компонента, пропорциональная  $\partial \xi_{\perp} / \partial z$ .

Если выражения для  $n'$ ,  $\mathbf{V}'$  и  $p'$  подставить в линеаризованное уравнение (2.5), то можно получить одно



векторное уравнение для смещения  $\xi$ . Но сначала мы несколько упростим выражение в правой части (2.5). Наиболее наглядно это можно сделать следующим образом.

Вернемся опять к уравнению (2.1) и вспомним, что согласно (1.13) выражение в правой части можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}] = -\nabla_{\perp} \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{4\pi} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}, \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$  — единичный вектор, направленный вдоль  $\mathbf{B}$ . Если линеаризовать это выражение, то в первое слагаемое вместо  $B^2$  мы должны подставить  $B_0^2 + 2\mathbf{B}_0\mathbf{B}'$ , так что линейный член будет содержать только  $z$ -компоненту возмущения  $\mathbf{B}'$ , которая определяется первым слагаемым в (2.12). Второе слагаемое в (2.13) в линейном приближении дает  $(B^2/4\pi)\partial\mathbf{h}'/\partial z$ , где  $\mathbf{h}'$  — возмущение направления магнитного поля.

Так как

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}}{\sqrt{(B_0 + B'_{\parallel})^2 + B'_{\perp}{}^2}}$$

и в линейном приближении можно пренебречь  $B'_{\perp}{}^2$  под корнем, то  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{B}'_{\perp}/B_0$ , где  $\mathbf{h}_0$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ . Таким образом, величина  $\mathbf{h}' = \mathbf{B}'_{\perp}/B_0$  определяется только вторым слагаемым в выражении (2.12) для возмущения магнитного поля. Подставляя найденные выражения для возмущения силы Ампера (2.13) и возмущений  $n'$ ,  $p'$  в уравнение движения (2.5), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla \text{div } \xi + c_A^2 \nabla_{\perp} \text{div } \xi_{\perp} + c_A^2 \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial z^2}, \quad (2.14)$$

где  $c_s = \sqrt{\gamma p_0/n_0}$  — скорость звука,  $c_A = B_0/\sqrt{4\pi m_i n_0}$  — альвеновская скорость. Уравнение (2.14) описывает малые магнитогидродинамические колебания однородной идеально проводящей среды.

2. *Альвеновские волны.* Одно векторное уравнение (2.14) соответствует трем скалярным, и поэтому оно описывает три типа волн. Среди них наиболее интересными и существенными для понимания свойств проводящей

жидкости в магнитном поле являются альвеновские волны, названные так в честь Х. Альвена.

Чтобы получить уравнение распространения альвеновских волн, рассмотрим некоторый более узкий класс смещений  $\xi$ , в котором смещение вдоль магнитного поля отсутствует,  $\xi_z = 0$ , а движение в поперечном направлении является несжимаемым,  $\text{div } \xi_{\perp} = 0$ . При этом, очевидно,  $\text{div } \xi = 0$ , так что в правой части уравнения (2.14) первое и второе слагаемые исчезают, и мы получаем уравнение только для  $\xi_{\perp}$ :

$$\frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} = c_A^2 \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial z^2}. \quad (2.15)$$

Это уравнение точно совпадает с уравнением малых колебаний струны. Любое его решение может быть представлено в виде суперпозиции волн, распространяющихся вдоль оси  $z$  со скоростью  $\pm c_A$ . Аналогия со струной возникает не только в связи с формальным сходством уравнений малых колебаний, она имеет и более глубокий физический смысл. В самом деле, последнее слагаемое в (2.14) связано с натяжением силовых линий, которое описывается вторым членом в выражении для силы Ампера (2.13). Это натяжение создает квазиупругую силу, возвращающую плазму к положению равновесия.

Альвеновские волны, как видно из уравнения (2.15), распространяются только вдоль силовых линий. Если, например, в некоторой плоскости мы будем производить смещение плазмы типа кручения (рис. 12,а) или более сложное несжимаемое движение с  $\text{div } \xi_{\perp} = 0$  (рис. 12,б), то соответствующее возмущение побежит вдоль силовых линий с альвеновской скоростью и будет локализовано внутри цилиндра, в котором начальное смещение было отлично от нуля.

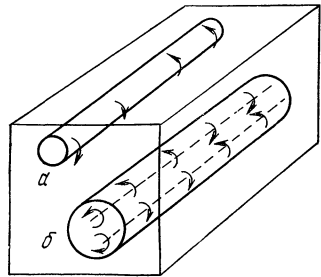


Рис. 12 Смещение плазмы в альвеновских волнах

3. *Магнитозвуковые волны.* Рассмотрим теперь два других типа колебаний, в которых  $\xi_z$  и  $\text{div } \xi_{\perp}$  отличны от

нуля. Удобно использовать уравнения именно для этих величин. Для продольной компоненты смещения  $\xi_z$  имеем из (2.14)

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} + c_s^2 \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \xi_{\perp}. \quad (2.16)$$

Уравнение для  $\operatorname{div} \xi_{\perp}$  мы получим, взяв дивергенцию от поперечной составляющей уравнения (2.14):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \xi_{\perp} = c_A^2 \Delta \operatorname{div} \xi_{\perp} + c_s^2 \Delta_{\perp} \operatorname{div} \xi_{\perp} + c_s^2 \Delta_{\perp} \frac{\partial \xi_z}{\partial z}, \quad (2.17)$$

где  $\Delta_{\perp} = \operatorname{div} \nabla_{\perp}$ ,  $\Delta = \Delta_{\perp} + \partial^2 / \partial z^2$ .

Рассмотрим сначала случай плазмы низкого давления,  $\beta \sim c_s^2 / c_A^2 \ll 1$ . Тогда в уравнении (2.17) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными  $c_s^2$ , и мы приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_A^2 \Delta \psi, \quad (2.18)$$

где  $\psi = \operatorname{div} \xi_{\perp}$ . Это уравнение описывает так называемый магнитный звук. Упругость среды в магнитозвуковых колебаниях создается давлением магнитного поля, причем альвеновскую скорость  $c_A = \sqrt{B^2 / 4\pi m_i n}$  можно рассматривать как скорость звука  $c_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$  в среде, где давление равно  $B^2 / 8\pi$ , плотность  $\rho = m_i n$ , а показатель адиабаты  $\gamma = 2$ . Условие  $\gamma = 2$  связано с замороженностью поля в плазму, благодаря чему при  $\xi_z = 0$  магнитное поле должно изменяться пропорционально плотности, а его давление должно быть пропорционально квадрату плотности плазмы.

При  $\operatorname{div} \xi_{\perp} \neq 0$  уравнение (2.16) позволяет найти малое (поскольку частота магнитного звука очень велика) продольное смещение  $\xi_z$  в магнитозвуковых волнах. Кроме того, при  $\beta \ll 1$  уравнение (2.16) описывает самостоятельную ветвь колебаний, в которых  $\operatorname{div} \xi_{\perp}$  можно положить равной нулю. Для этих колебаний имеем

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2}.$$

Такие колебания называются ионно-звуковыми. Они представляют собой звук, распространяющийся вдоль

магнитного поля, причем смещение плазмы при  $\beta \rightarrow 0$  происходит только вдоль магнитного поля.

Таким образом, трем типам волн соответствуют три типа смещений (можно сказать — поляризаций). В альвеновских волнах смещение приводит к искривлению силовых линий (рис. 11,б), в магнитозвуковых — к их сжатию и разрежению (рис. 11,а), а в ионно-звуковых при  $\beta \ll 1$  магнитное поле почти не возмущается (рис. 11,в) и плазма как бы одномерна, т. е. каждая ее трубка «заключена в жесткие магнитные стенки».

Если  $\beta$  не мал, то разделения на магнитный и ионный звук провести нельзя. В этом случае нужно рассматривать уравнения (2.16), (2.17) совместно. Для их решения удобно воспользоваться плоскими волнами. Как известно, в однородной среде произвольное возмущение можно представить в виде суперпозиции плоских волн. Поэтому достаточно рассмотреть лишь плоскую волну вида  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Для такой волны уравнения (2.16), (2.17) принимают более простой вид алгебраических уравнений:

$$(\omega^2 - c_s^2 k_z^2) \xi_z - k_z c_s^2 (\mathbf{k}_\perp \xi_\perp) = 0, \quad (2.19)$$

$$-k_z c_s^2 k_\perp^2 \xi_z + (\omega^2 - c_A^2 k^2 - c_s^2 k_\perp^2) (\mathbf{k}_\perp \xi_\perp) = 0. \quad (2.20)$$

Чтобы эта система уравнений имела нетривиальные решения, ее детерминант должен обращаться в нуль. Это условие приводит к некоторому соотношению между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , которое принято называть дисперсионным уравнением. В данном случае, как нетрудно убедиться, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^4 - (c_A^2 + c_s^2) k^2 \omega^2 + c_A^2 c_s^2 k_z^2 k^2 = 0. \quad (2.21)$$

Большой корень этого уравнения  $\omega_+^2$  соответствует так называемой ускоренной магнитозвуковой волне, а меньший  $\omega_-^2$  — замедленной. При  $c_s^2 \ll c_A^2$  ускоренная волна превращается в магнитозвуковую, а замедленная — в ионно-звуковую.

Уравнение (2.21) существенно упрощается в двух частных случаях — при продольном и поперечном распространении. При продольном распространении  $k^2 = k_z^2$  и из (2.21) следует  $\omega_+^2 = c_A^2 k_z^2$  для быстрой волны и  $\omega_-^2 = c_s^2 k_z^2$  для медленной волны (при  $c_A > c_s$ ). При по-

перечном распространении  $k_z=0$  и согласно (2.21)  $\omega_+^2 = (c_A^2 + c_s^2)k^2$ ,  $\omega_-^2 = 0$ .

В общем случае выражения для  $\omega_+^2$  и  $\omega_-^2$  легко получаются из (2.21), однако они трудно обозримы. Гораздо более наглядное представление дает полярная диаграмма фазовых скоростей.

4. *Полярная диаграмма и диаграмма Фридрихса.* Фазовая полярная диаграмма представляет собой зависимость фазовой скорости  $v_\phi = \omega/k$  от угла  $\theta$  между вектором  $\mathbf{k}$  и магнитным полем  $\mathbf{B}$  в полярной системе координат  $v_\phi, \theta$ . Она имеет вид, показанный на рис. 13,а.

Для быстрой магнитозвуковой волны фазовая диаграмма имеет вид овала, сплюснутого вдоль направления магнитного поля, а для медленной — двух соприкасающихся овалов, сплюснутых в поперечном направлении

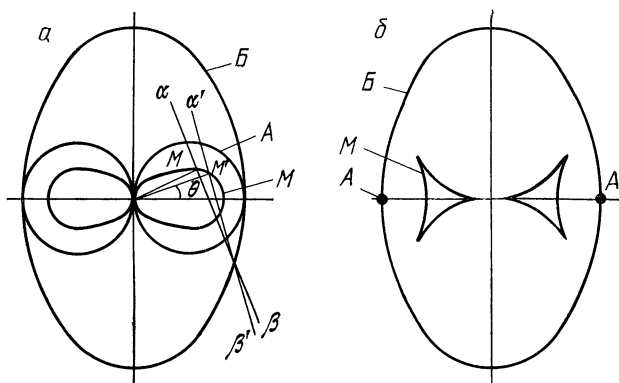


Рис. 13. Фазовая (а) и групповая (б) поляры: А — альвеновская волна, М — медленная, Б — быстрая магнитозвуковая волны

(рис. 13, а). При  $\beta \rightarrow 0$  большой овал переходит в окружность радиуса  $c_A$ , а диаграмма для ионно-звуковой волны переходит в две соприкасающиеся окружности диаметра  $c_s$ . В другом предельном случае  $c_s/c_A \rightarrow \infty$  мы переходим к несжимаемой жидкости и полярная диаграмма для магнитного звука переходит в две соприкасающиеся окружности диаметра  $c_A$ . Точно такая же диаграмма соответствует альвеновской волне при любых  $\beta$ .

Наряду с фазовой полярной диаграммой можно по-

строить поверхность фазовых скоростей для любых значений  $\mathbf{k}$  в трехмерном пространстве. Однако для простоты мы ограничимся лишь двумерным случаем.

Как мы увидим ниже, практически более интересна полярная диаграмма групповой скорости  $\mathbf{v}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ , т. е. зависимость числового значения групповой скорости от ее направления. Групповую поляру обычно называют диаграммой Фридрихса (иногда диаграммами Фридрихса называют и фазовую, и групповую поляры).

Как известно, групповая скорость определяет скорость распространения волнового пакета. В случае недиспергирующих сред, когда частота  $\omega$  пропорциональна  $k$ , групповая скорость не зависит от числового значения  $\mathbf{k}$ . Это означает, что все возмущения, распространяющиеся в данном направлении, имеют одну и ту же скорость. В частности, если возмущение имело вид импульса во времени, то оно все время будет иметь вид нерасплывающегося импульса. Отсюда видно, что групповая полярная диаграмма представляет собой картину импульса, распространяющегося от мгновенного точечного источника: каждому участку диаграммы можно поставить в соответствие небольшой волновой пакет, распространяющийся с групповой скоростью.

Диаграмму Фридрихса можно определить аналитически, вычисляя  $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$ . Но гораздо более наглядным является ее графическое построение. Оно позволяет, кроме того, несколько по-иному взглянуть на картину распространения возмущения от точечного источника. Учтем, что  $\omega = kv_\phi(k/k)$ , где  $v_\phi$  зависит только от направления  $\mathbf{k}$ , но не от его значения. Отсюда следует, что

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k} v_\phi + \mathbf{v}_{\perp g},$$

где составляющая  $\mathbf{v}_{\perp g} = k \partial v_\phi / \partial \mathbf{k}$  перпендикулярна волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Как мы видим, нормальная к волновой поверхности составляющая групповой скорости совпадает с фазовой скоростью. Наглядно можно представить себе, что некоторый выделенный участок плоской волны распространяется в виде «лепешечки», ориентированной перпендикулярно  $\mathbf{k}$  (этот участок можно рассматривать как волновой пакет). Этот пакет движется вдоль  $\mathbf{k}$  со скоростью  $v_\phi$  и, кроме того, «соскальзывает» в поперечном направлении со скоростью

$v_{\perp g}$ . (Для фазовой скорости поперечная по отношению к  $\mathbf{k}$  составляющая, разумеется, смысла не имеет.)

Соответственно всю групповую поляру можно рассматривать приближенно как «мозаичную», составленную из отдельных плоских «лепешечек» — волновых пакетов. С учетом этих соображений нетрудно сообразить, как можно геометрически построить групповую поляру по фазовой. Возьмем для этого произвольную точку  $M$  на фазовой поляре и проведем линию  $\alpha\beta$ , перпендикулярную радиус-вектору точки  $M$ , т. е. вектору  $\mathbf{k}$  (рис. 13, а). «Лепешечка» группового пакета  $\mathbf{k}$  должна лежать где-то на этой линии. Возьмем теперь близкую к  $M$  точку  $M'$  на фазовой поляре и проведем линию  $\alpha'\beta'$ , перпендикулярную радиус-вектору точки  $M'$ . Волновой пакет, отвечающий набору плоских волн с волновыми числами вблизи точки  $M'$ , должен лежать на линии  $\alpha'\beta'$ . Но при близких  $M$  и  $M'$  волновые пакеты соответствующих плоскостей должны сливаться, образуя единый волновой пакет. Таким образом, этот пакет должен находиться на пересечении линий  $\alpha\beta$  и  $\alpha'\beta'$ , соответствующих близким точкам  $M$ ,  $M'$ .

Итак, для построения групповой поляры по фазовой достаточно провести семейство прямых, перпендикулярных радиус-векторам точек на фазовой поляре и проходящих через их концы, и найти огибающую семейства этих прямых. Построенная таким образом диаграмма Фридрихса изображена на рис. 13, б. Для быстрой магнитозвуковой волны она имеет вид овала, для медленной — двух «заостренных» треугольников, а для альвеновской волны она вырождается в две точки на внешнем овале. Групповая поляра показывает, как распространяется импульс от мгновенного точечного источника: соответствующее возмущение отлично от нуля в области между быстрой и медленной полярами с повышенной амплитудой вблизи границ, т. е. поляр.

Интересная особенность диаграммы Фридрихса возникает в случае  $\beta = 8\pi\rho/B^2 = 1$ , когда альвеновская скорость совпадает со звуковой [47]. Согласно (2.21) при этом  $\omega_{\pm}^2 = c_A^2 k^2 (1 \pm \sin \theta)$ , где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}$ , т. е.  $\cos \theta = k_z/k$ . На фазовой поляре при этом образуется угловая точка при  $\theta = 0$  и соответственно вектор групповой скорости не стремится к горизонтальному направлению при  $\theta \rightarrow 0$ , а составляет с ним конечный угол, равный

приблизительно  $\theta_0 \approx 26^\circ$ . В этом случае в плазме должно наблюдаться явление, аналогичное внутренней конической рефракции в оптике: падающий вдоль  $\mathbf{B}_0$  нормально к границе «пучок» магнитогидродинамических волн должен развернуться в конус с углом раствора  $2\theta_0$ . Нам не известно, наблюдал ли кто-нибудь это явление экспериментально.

5. *Обтекание малых тел.* Диаграмма Фридрихса позволяет легко рассмотреть картину обтекания тонкого иглообразного тела, движущегося в поперечном к полю направлении. Допустим, что длина тела настолько велика, что его можно считать бесконечным, а магнитное поле направлено перпендикулярно оси тела. Кроме того, примем, что электропроводность тела невелика и оно не «наматывает» на себя силовых линий. При этом картина обтекания является чисто двумерной, и на далеком расстоянии от тела возмущение можно считать малым. Как и в обычной газодинамике, можно считать, что движущееся тело создает непрерывный ряд точечных мгновенных возмущений, от каждого из которых расходятся

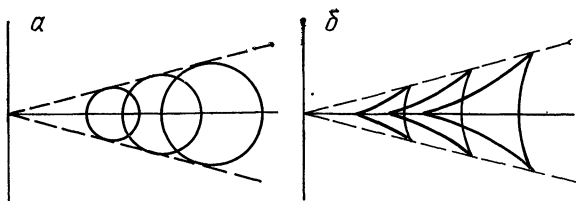


Рис. 14. Черенковское излучение в изотропной среде (а) и для магнитной газодинамики (б)

импульсы в форме расширяющихся диаграмм Фридрихса. Там, где эти импульсы складываются в фазе, возникнут расходящиеся от тела волны типа волн Маха, а в остальных точках в результате интерференции останутся гораздо меньшие возмущения (рис. 14, а, б).

Чтобы найти волны Маха, достаточно на диаграмме Фридрихса построить вектор скорости тела и из его конца провести касательные к диаграмме Фридрихса, как это изображено на рис. 15 для различных частных случаев. Течения на рис. 15, а, в являются дважды гиперболическими, а течения на рис. 15, б, г — гиперболически-эллиптическими (только один тип излучаемых



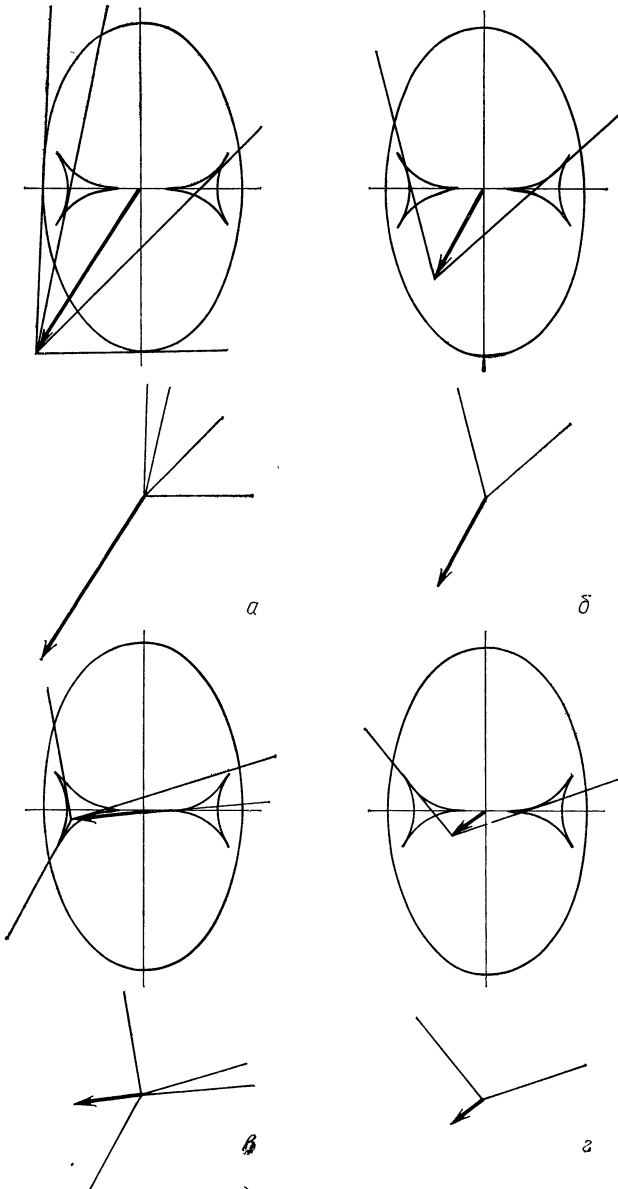


Рис. 15. Четыре случая образования линий Маха, отходящих от тела, скорость которого дается жирным вектором

волн). Как видно из рис. 15, в, г, в магнитной гидродинамике возмущения могут распространяться вверх по течению, т. е. впереди движущегося тела. Следует подчеркнуть, что эти волны отвечают обычному черенковскому излучению тела, движущегося со скоростью, большей фазовой скорости излучаемых волн. Именно в результате того, что складываются импульсы, отвечающие групповой, а не фазовой поляре, появляется необычная возможность излучения волн впереди движущегося тела.

## § 2. Дисперсия волн в двухжидкостной гидродинамике

1. *Ионный звук.* Магнитная гидродинамика достаточно хорошо описывает крупномасштабные низкочастотные движения в плазме, но она все же является лишь некоторым приближением. Естественно, что в волновых движениях плазмы могут проявляться эффекты, которые не охватываются одножидкостной гидродинамикой. Одним из таких эффектов является дисперсия, т. е. зависимость фазовой скорости от частоты.

Как мы установили выше, идеально проводящая жидкость является хотя и анизотропной, но недиспергирующей средой: фазовая скорость распространения малых возмущений в ней зависит лишь от направления волнового вектора, но не от его числового значения. Это обстоятельство, как мы вскоре увидим, имеет существенное значение для эволюции возмущений с конечной амплитудой, и поэтому нужно ясно представлять себе, до каких длин волн плазму можно считать недиспергирующей и какой характер имеет дисперсия при уменьшении длины волны.

Рассмотрим сначала ионный звук, предполагая, что  $\beta \ll 1$  и, следовательно, возмущением магнитного поля при колебаниях можно пренебречь. Это означает, что электрическое поле в колебаниях можно считать потенциальным:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx 0.$$

Чтобы определить дисперсию звука, следует воспользоваться двухжидкостной гидродинамикой вместо более грубой одножидкостной. В рассматриваемом здесь слу-

чае потенциальных колебаний уравнения существенно упрощаются, поскольку не нужно рассматривать колебания магнитного поля. Мы еще более упростим рассмотрение, сделав допущение, что ионы холодные, т. е.  $T_i = 0$  (фактически это означает, что ионная температура много меньше электронной). Более общий случай разреженной плазмы с  $T_i \neq 0$  требует, вообще говоря, кинетического рассмотрения, поскольку фазовая скорость ионного звука невелика и при  $T_i \sim T_e$  имеет порядок величины тепловой скорости ионов.

Итак, при  $T_i = 0$  в пренебрежении инерцией электронов и столкновениями их с ионами имеем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_i} \nabla \varphi + \frac{e}{m_i c} [\mathbf{v} \mathbf{B}], \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{v} = 0, \quad (2.23)$$

$$\nabla n_e T_e = e n_e \nabla \varphi - \frac{e n_e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}], \quad (2.24)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi e (n_i - n_e). \quad (2.25)$$

Уравнение Пуассона (2.25) устанавливает связь между потенциалом  $\varphi$  и возмущением плотности ионов и электронов.

Для простоты мы будем считать, что электроны имеют постоянную температуру  $T_e = \text{const}$ , что вполне допустимо для рассматриваемых здесь волн, распространяющихся с фазовой скоростью, значительно меньшей тепловой скорости электронов. Из продольной компоненты уравнения равновесия (2.24) для электронов

$$T_e \frac{\partial n_e}{\partial z} = e n_e \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2.26)$$

следует, что вдоль силовых линий магнитного поля электроны имеют больцмановское распределение. Для рассматриваемых здесь малых колебаний в однородной плазме из (2.26) получаем

$$n'_e = n_0 \frac{e \varphi}{T_e}. \quad (2.27)$$

Найдем теперь возмущение плотности ионов  $n'_i$ . Для этого воспользуемся уравнением движения (2.22) и уравнением непрерывности (2.23). Для возмущения типа

плоской волны вида  $\exp(-i\omega t + ikr)$  получаем из продольной компоненты уравнения движения

$$v_z = \frac{e}{m_i} \frac{k_z}{\omega} \varphi. \quad (2.28)$$

Чтобы найти поперечную составляющую скорости ионов, удобно ввести систему координат  $(x, y, z)$ , ось  $z$  которой направлена вдоль магнитного поля, а ось  $y$  перпендикулярна  $\mathbf{k}$ , так что  $\mathbf{k}$  имеет только компоненты  $k_x = k_\perp$  и  $k_z$ . Тогда в проекциях на оси  $x, y$  уравнение движения для ионов примет вид

$$-i\omega v_x - \Omega_i v_y = \frac{e}{m_i} E_x = -\frac{e}{m_i} i k_\perp \varphi, \quad (2.29)$$

$$\Omega_i v_x - i\omega v_y = 0, \quad (2.30)$$

где  $\Omega_i = eB/m_i c$ . Отсюда легко находим компоненты скорости

$$v_x = -\frac{i\omega}{\Omega_i^2 - \omega^2} \frac{e}{m_i} E_x = -\frac{\omega}{\Omega_i^2 - \omega^2} \frac{e}{m_i} k_\perp \varphi, \quad (2.31)$$

$$v_y = \frac{\Omega_i}{\Omega_i^2 - \omega^2} \frac{e}{m_i} E_x = -\frac{\Omega_i}{\Omega_i^2 - \omega^2} \frac{e}{m_i} k_\perp \varphi, \quad (2.32)$$

а следовательно, и

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_\perp = -\frac{i\omega}{\Omega_i^2 - \omega^2} \frac{e}{m_i} k_\perp^2 \varphi.$$

Подставляя найденное выражение в уравнение непрерывности

$$-i\omega n'_i + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_\perp + n_0 i k_z v_z = 0 \quad (2.33)$$

и учитывая выражение (2.28) для продольной скорости ионов, получим возмущение плотности ионов

$$n'_i = \left( \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega^2} - \frac{k_\perp^2 c_s^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} \right) n_0 \frac{e \varphi}{T_e}, \quad (2.34)$$

где  $c_s^2 = T_e/m_i$ .

Подставим теперь найденные выражения для плотности электронов (2.27) и ионов (2.34) в уравнение Пуассона (2.25), которое для плоской волны можно записать

В виде

$$k^2 d^2 n_0 \frac{e \Phi}{T_e} = n'_i - n'_e, \quad (2.35)$$

где  $d^2 = T_e / 4\pi e^2 n_0$  — квадрат дебаевского радиуса. После подстановки получим дисперсионное уравнение для определения частоты колебаний  $\omega$ :

$$1 + k^2 d^2 = \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega^2} - \frac{k_\perp^2 c_s^2}{\Omega_i^2 - \omega^2}. \quad (2.36)$$

Рассмотрим сначала случай продольного распространения, когда  $k_\perp = 0$ ,  $k = k_z$ . При этом

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 c_s^2}{1 + k_z^2 d^2}. \quad (2.37)$$

При  $k_z d \ll 1$  мы получаем обычное выражение для частоты ионного звука  $\omega = c_s k_z$ , которое следует из одножидкостной гидродинамики. Однако по мере увеличения  $k_z$  частота медленнее растет с  $k_z$ , и фазовая скорость  $\omega/k_z$  начинает уменьшаться. При  $k_z \rightarrow \infty$  она стремится к нулю. При этом колебания ионов происходят при практически неподвижных электронах, давление которых противостоит действию электрического поля и не дает электронам смещаться.

Аналогичная картина имеет место и в отсутствие магнитного поля. Если положить в (2.34)  $\Omega_i = 0$ , то мы получим выражение прежнего вида лишь с заменой  $k_z$  на  $k$ :

$$\omega^2 \equiv \omega_1^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 d^2}. \quad (2.38)$$

Рассмотрим теперь более общий случай ионно-звуковых колебаний в магнитном поле при произвольных значениях  $k$ . Если использовать обозначение  $\omega_1^2$  для квадрата частоты (2.38) в отсутствие магнитного поля, то дисперсионное уравнение (2.36) можно переписать в виде

$$\omega^4 - (\Omega_i^2 + \omega_1^2) \omega^2 + \Omega_i^2 \omega_1^2 \frac{k_z^2}{k^2} = 0. \quad (2.39)$$

Отсюда следует

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\Omega_i^2 + \omega_1^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\Omega_i^2 + \omega_1^2)^2 - \frac{k_z^2}{k^2} \Omega_i^2 \omega_1^2}. \quad (2.40)$$

При  $k \rightarrow 0$  отсюда находим два корня:  $\omega^2 = \Omega_i^2$  и  $\omega^2 = c_s^2 k_z^2$ . При увеличении волнового числа  $k$  фазовая скорость медленной волны начинает зависеть от  $k$ . Для случая плотной плазмы, когда  $c_A < c$  ( $c$  — скорость света), т. е. при  $\Omega_i < \omega_{pi} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_i}$ , зависимость частоты от  $k$  имеет вид, представленный на рис. 16. При больших  $k$  частота медленной волны стремится к  $\Omega_i \cos \theta = \Omega_i k_z / k$ , а частота быстрой — к  $\omega_1$ . Дисперсия для медленной косой волны в магнитном поле начинается значительно раньше, чем при продольном распространении, а именно при  $k \sim \Omega_i / c_s$ . Если волна распространяется вдоль магнитного поля, то дисперсионная зависимость  $\omega = \omega(k)$  сводится к двум пересекающимся кривым:  $\omega = \Omega_i$  и  $\omega = \omega_1$ , как показано пунктиром на рис. 16.

2. *Магнитный звук* (поперечное распространение). Рассмотрим теперь дисперсию магнитного звука. Допустим, что волна распространяется точно поперек магнитного поля, скажем, вдоль оси  $x$ . В этом случае, как мы увидим, дисперсия связана с инерцией электронов, которая должна быть учтена в обобщенном законе Ома, в качестве которого мы используем электронное уравнение движения. В пренебрежении давлением электронов для плоской волны вида  $\exp(-i\omega t + ikx)$  оно имеет вид

$$-i\omega \mathbf{v}_e = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \frac{e B_0}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{h}], \quad (2.41)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{B}_0 / B_0$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ . Отсюда с учетом того, что  $\omega \ll \Omega_e = eB_0 / m_e c$ , получаем приближенно

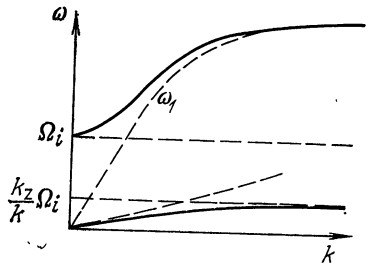


Рис. 16. Дисперсия ионного звука

$$\mathbf{v}_e = \frac{c}{B_0} [\mathbf{E} \mathbf{h}] + \frac{i \omega}{\Omega_e} \frac{c}{B_0} \mathbf{E}. \quad (2.42)$$

Если бы мы учли только первое слагаемое в правой части (2.42), отвечающее дрейфу электронов, т. е. пренебрегли инерцией электронов, то согласно (2.41) это соответствовало бы идеальной электронной проводимости и, следовательно, вмороженности магнитного поля в электронную компоненту. Но при чисто поперечном распространении волны в квазинейтральной плазме электроны должны смещаться вместе с ионами, поэтому вмороженность поля в электроны автоматически соответствует его вмороженности в ионы. А это, как мы уже установили в § 1, приводит к магнитозвуковой волне без дисперсии.

Таким образом, чтобы начала появляться дисперсия,  $x$ -составляющая скорости электронов должна отличаться от скорости дрейфа электронов. Другими словами, в  $x$ -компоненте скорости электронов следует учесть малый член, отвечающий так называемому инерционному дрейфу:

$$v_{ex} = \frac{c E_y}{B_0} + \frac{i \omega}{\Omega_e} \frac{c E_x}{B_0}. \quad (2.43)$$

Что касается  $y$ -компоненты скорости, то для нее можно сохранить прежнее значение

$$v_{ey} = -\frac{c}{B_0} E_x. \quad (2.44)$$

С помощью этого соотношения  $E_x$  можно выразить через  $v_{ey} = -j_y / en_0$ , где  $y$ -компонента плотности тока связана с возмущением магнитного поля  $B'$  соотношением

$$j_y = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B'}{\partial x} = -i \frac{c k}{4\pi} B'. \quad (2.45)$$

Используя уравнение Максвелла  $\partial \mathbf{B}' / \partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$ , легко выразить  $B'$  через  $E_y$ :

$$B' = \frac{c k}{\omega} E_y. \quad (2.46)$$

С помощью соотношений (2.44)—(2.46) можно выразить  $E_x$  через  $E_y$  и подставить затем в выражение для

скорости электронов (2.43). В результате получим

$$v_{ex} = \left( 1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{c E_y}{B}, \quad (2.47)$$

где

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4 \pi e^2 n_0}{m_e}} \quad (2.48)$$

— ленгмюровская частота.

Чтобы получить дисперсионное уравнение для частоты, воспользуемся еще линеаризованным уравнением движения

$$m_i n_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{B_0 B'}{4\pi}, \quad (2.49)$$

представляющим собой фактически сумму уравнений движения для ионов и электронов, в которой опущен малый инерционный электронный член. Для плоской волны вида  $\exp(-i\omega t + ikx)$  с учетом выражения (2.46) для  $B'$  получаем отсюда

$$v_x = \frac{c_A^2 k^2}{\omega^2} \frac{c E_y}{B_0}. \quad (2.50)$$

Так как в силу квазинейтральности плазмы скорости  $v_x$  и  $v_{ex}$  должны совпадать, то из (2.47), (2.50) получаем

$$\omega^2 = c_A^2 k^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 + c^2 k^2}. \quad (2.51)$$

Эта зависимость  $\omega$  от  $k$  представлена на рис. 17. При малых  $k$  частота линейно возрастает с увеличением волнового числа, затем при  $k \sim \omega_{pe}/c$  скорость возрастания уменьшается, и при  $k \rightarrow \infty$  частота стремится к предельному значению  $c_A \omega_{pe}/c = \sqrt{\Omega_e \Omega_i}$ , т. е. среднему геометрическому из циклотронных частот электронов и ионов. Эта частота называется нижней гибридной.

Рассмотренная картина относится только к случаю плазмы низкого давления ( $\beta \ll 1$ ). При  $\beta \gtrsim 1$  дисперсия начинается гораздо раньше — при  $\omega \sim \Omega_i$ . Дело в том, что в бесстолкновительной плазме при  $\omega \ll \Omega_i$  показатель адиабаты для ионов  $\gamma = 2$ , а при  $\omega \gg \Omega_i$  он становится равным 3 (в одном случае в колебаниях участву-



ют две степени свободы, а в другом — только одна). Соответственно фазовая скорость начинает возрастать в области  $\omega \sim \Omega_i$ . Этой частоте соответствует длина волны порядка ионного ларморовского радиуса.

3. *Косая магнитозвуковая волна.* В косой магнитозвуковой волне, как и в косой ионно-звуковой волне, дисперсия начинается гораздо раньше. Это связано с

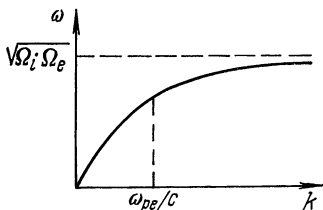


Рис. 17. Дисперсия магнитного звука при поперечном распространении

тем, что в косой волне квазинейтральность может устанавливаться благодаря перетеканию электронов вдоль магнитного поля, и дисперсия должна появляться, как только становится заметным различие поперечных скоростей электронов и ионов. При этом инерция электронов еще не играет роли. Как мы установили при рассмотрении равновесия плазмы, в этом случае при  $T_e = \text{const}$  магнитное поле заморожено в электроны:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}]. \quad (2.52)$$

В пренебрежении давлением плазмы уравнение движения имеет вид

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}] = -\nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}. \quad (2.53)$$

Так как  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{j}/en$ , то уравнение (2.52) с учетом уравнения движения (2.53) может быть записано в виде

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{m_i c}{e} \text{rot} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (2.54)$$

Последнее слагаемое в этом уравнении, которое появляется из-за эффекта Холла, и приводит к дисперсии магнитозвуковых волн.

Если линеаризовать уравнение движения (2.53) и уравнение (2.54) для магнитного поля, то, вводя сме-

шение плазмы  $\xi$  и используя выкладки § 1, получим для плоской волны систему двух уравнений:

$$-m_i n_0 \omega^2 \xi = -i k_{\perp} \frac{B_0 B'_z}{4\pi} + \frac{B_0}{4\pi} i k_z B'_{\perp}, \quad (2.55)$$

$$B' = -B_0 i k \xi_{\perp} + B_0 i k_z \xi_{\perp} + \frac{\omega m_i c}{e} [k \xi]. \quad (2.56)$$

Из первого уравнения видно, что  $\xi_z = 0$ , а уравнения для  $\xi_x$  и  $\xi_y$  могут быть получены, если вместо  $B'$  подставить его выражение через  $\xi$  (2.56). Для плоской волны типа

$$\exp(-i\omega t + i k_{\perp} x + i k_z z)$$

с  $k_y = 0$ ,  $k_x = k_{\perp}$  эти уравнения имеют вид

$$(\omega^2 - c_A^2 k^2) \xi_x - i\omega \frac{k^2 c B_0}{4\pi e n_0} \xi_y = 0, \quad (2.57)$$

$$i\omega \frac{k_z^2 c B_0}{4\pi e n_0} \xi_x + (\omega^2 - c_A^2 k_z^2) \xi_y = 0. \quad (2.58)$$

Приравнявая нулю детерминант этой системы, получим дисперсионное уравнение:

$$(\omega^2 - c_A^2 k^2)(\omega^2 - c_A^2 k_z^2) - \omega^2 k^2 k_z^2 c_A^4 / \Omega_i^2 = 0. \quad (2.59)$$

Рассмотрим для простоты случай почти поперечного распространения, когда  $k_z^2 \ll k^2$ . Тогда для магнитозвуковой волны с  $\omega \gg c_A k_z$  получим

$$\omega^2 = c_A^2 k^2 \left( 1 + \frac{c_A^2 k_z^2}{\Omega_i^2} \right). \quad (2.60)$$

Соответствующая дисперсионная кривая представлена на рис. 18. Как мы видим, при малых  $k$  частота линейно растет с  $k$ , а затем, начиная с  $k \sim \Omega_i / c_A \theta$ , где  $\theta = k_z / k$ , она начинает возрастать гораздо быстрее.

Если  $\theta = k_z / k \gg \sqrt{m_e / m_i}$ , то дисперсия косой волны начинается значительно раньше, чем дисперсия поперечной волны с тем же значением  $k$ . Только в этом случае и оправдано пренебрежение инерцией электронов. Именно волны с  $k_z / k \gg \sqrt{m_e / m_i}$  мы будем называть косыми. Следует отметить, что при больших  $k$ ,

когда в скобках (2.60) единицей можно пренебречь, частота (2.60) становится равной

$$\omega = \frac{c_A c k k_z}{\omega_{pi}} = \frac{c B_0 k k_z}{4\pi e n_0}. \quad (2.61)$$

Она не зависит от массы ионов  $m_i$ . При этом колебания происходят практически при неподвижных ионах, так что колеблются только электроны с вмороженными в них силовыми линиями. Эти колебания называют геликонами или свистами.

4. *Альвеновская волна.* Вторым корнем уравнения (2.59) соответствует альвеновской волне. Ограничимся для простоты опять случаем почти поперечного распространения, когда  $k_z^2 \ll k^2$ . Тогда для этого корня с  $\omega^2 \ll c_A^2 k^2$  получим

$$\omega^2 = c_A^2 k_z^2 \frac{\Omega_i^2}{\Omega_i^2 + c_A^2 k_z^2}. \quad (2.62)$$

Это соотношение устанавливает закон дисперсии для альвеновских волн. Как мы видим, при увеличении  $k_z$  зависимость  $\omega$  от  $k_z$  начинает отклоняться от линейной, и при  $k_z \rightarrow \infty$  частота стремится к циклотронной частоте ионов  $\Omega_i$ . Соответствующая зависимость частоты от  $k$  также представлена на рис. 18. Альвеновские волны с

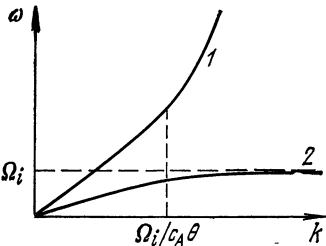


Рис. 18. Дисперсия магнитного звука (1) и альвеновской волны (2) при косом распространении

большими  $k_z$  и частотой, близкой к ионной циклотронной, иногда называют просто циклотронными.

### § 3. Линейные волны в диспергирующих средах

1. *Дисперсия волн на глубокой воде.* Когда мы рассуждаем о распространении волнового движения в среде на примере плоских волн, то их дисперсия кажется

совершенно безобидной: ведь это всего лишь зависимость фазовой скорости от длины волны. Но в реальных условиях монохроматические волны возбуждаются редко. Скорее возбуждаются волновые пакеты или более или менее локализованные возмущения, которые можно представлять как суперпозицию плоских волн. В таких образованиях дисперсия приводит к целому ряду весьма своеобразных и интересных эффектов.

Эти эффекты можно было бы рассмотреть непосредственно для волн в плазме. Но, пожалуй, более наглядно можно с ними познакомиться на примере волн на воде, тем более, что каждый из нас встречается с ними гораздо чаще, чем с волнами в плазме.

Нам удобно будет начать с самого простого примера гравитационных волн на глубокой воде. Движение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением Эйлера с учетом силы тяжести

$$\rho \frac{dv}{dt} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (2.63)$$

и уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.64)$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения, направленное вниз.

В равновесии в жидкости устанавливается гидростатическое давление  $p_0(z)$ , градиент которого равен  $\rho \mathbf{g}$ . Рассмотрим теперь малые колебания. Вместо  $\mathbf{v}$  опять введем смещение  $\xi$ , и тогда линеаризованное уравнение (2.63) примет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla p', \quad (2.65)$$

где  $p'$  — возмущение давления. Так как  $\operatorname{div} \xi = 0$ , то, беря дивергенцию от уравнения движения (2.65), получим

$$\Delta p' = 0. \quad (2.66)$$

Если ввести систему координат с осью  $z$ , направленной по вертикали, и осью  $x$  вдоль распространения волны, то для волны вида  $\exp(-i\omega t + ikx)$  получаем

$$\frac{d^2 p'}{dz^2} - k^2 p' = 0. \quad (2.67)$$

Для случая очень большой глубины  $p'$  должно убывать при  $z \rightarrow -\infty$  и, следовательно, зависимость от  $z$  должна иметь вид  $\exp kz$ .

Чтобы получить дисперсионное уравнение для частоты, учтем, что при возвышении поверхности на величину  $\xi_z$  давление под ней увеличивается на  $p' = \rho g \xi_z$ . Подставляя это значение в выражение для  $z$ -компоненты уравнения движения (2.65), т. е. в соотношение

$$\omega^2 \xi_z = \frac{k}{\rho} p', \quad (2.68)$$

получим

$$\omega^2 = kg. \quad (2.69)$$

Это и есть дисперсионное соотношение для гравитационных волн на глубокой воде.

Для очень коротких волн наряду с силой тяжести начинает играть роль поверхностное натяжение. Учитывая, что вследствие поверхностного натяжения давление под искривленной поверхностью изменяется на величину  $p' = \sigma/R = -\sigma \partial^2 \xi_z / \partial z^2$ , где  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $R$  — радиус кривизны, мы получим для возмущения давления вблизи поверхности (т. е. при  $z=0$ )  $p' = \rho g \xi_z + \sigma k^2 \xi_z$ . Подставляя это выражение в уравнение (2.68), найдем

$$\omega^2 = kg + \frac{\sigma}{\rho} k^3. \quad (2.70)$$

Отсюда видно, что при больших  $k$  гравитационные волны переходят в капиллярные с дисперсией  $\omega = \sqrt{\sigma/\rho} k^{3/2}$ . У воды переход от гравитационных волн к капиллярным происходит при  $k \sim 10$ , т. е. при длине волны порядка сантиметра.

2. *Волны от мгновенного точечного источника.* «Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые...» — сказано у Козьмы Пруткова, и, правдо, стоит потратить некоторое время на внимательное рассмотрение кругов от брошенного в воду камешка. В самом деле, очень интересно наблюдать, как от камешка, возмущающего поверхность воды только в очень маленькой области, постепенно начинают отходить круги, их число растет, они как бы зарождаются из ничего и заполняют собой большой быстро расширяющийся круг. Это и есть

один из наиболее простых и ярких примеров распространения волн в диспергирующих средах.

С математической точки зрения вся эта картина довольно проста. Начальное локализованное возмущение можно рассматривать как двумерную  $\delta$ -функцию, которую можно представить в виде суперпозиции плоских или круговых волн. Со временем в силу дисперсии эти волны начинают расходиться друг от друга, и образуются наблюдаемые нами круги. Короче говоря, мы имеем дело с одной из простейших задач математической физики, точное решение которой не представляет трудностей.

Но нас здесь интересует не столько количественная, сколько качественная сторона явления. Хотелось бы располагать простой и достаточно общей картиной, чтобы ее можно было использовать для произвольных диспергирующих сред.

Будем рассуждать следующим образом. Подождем некоторое время, пока от точечного источника не отойдет много волн. Разобьем затем круг, заполненный волнами, на совокупность таких колец, чтобы в каждом кольце содержалось по крайней мере несколько гребешков. Любое из таких колец можно рассматривать как волновой пакет, который распространяется независимо от других пакетов. Каждый из пакетов распространяется с групповой скоростью  $v_g = \partial\omega/\partial k = (1/2)\sqrt{g/k}$ , и к моменту времени  $t$  он придет в точку, удаленную от источника на расстояние  $r = v_g t = (1/2)\sqrt{(g/k)t}$ . Обернув это соотношение, можно найти волновое число  $k$  для волны, которая в момент  $t$  находится в данной точке  $r$ :

$$k = \frac{g t^2}{4 r^2} \quad (2.71)$$

При фиксированном  $r$  это соотношение показывает, как изменяется волновое число в данной точке со временем. Мы видим, что оно квадратично возрастает с  $t$ . Можно сказать, что из центра в данную точку, сменяя друг друга, приходят все новые и новые пакеты с возрастающими значениями  $k$ . Эти пакеты набегают с групповой скоростью  $v_g$ , равной, как мы видели выше,  $v_g = r/t$ . Чем больше  $t$ , тем более медленный пакет приходит в данную точку, так что он, естественно, должен быть более коротковолновым. Заметим, что фазовая скорость гравитационных волн в два раза больше групповой,  $v_\phi =$

$=2v_r=2r/t$ , так что гребешки волн проходят каждую точку круга со скоростью, вдвое большей скорости пакетов.

В фиксированный момент времени  $t$  выражение (2.71) показывает, как изменяется волновое число в зависимости от  $r$ . Как мы видим, при малых  $r$  волновое число  $k$  очень велико, а при увеличении  $r$  оно быстро убывает, достигая значения  $k \sim 1/r$  при  $r \sim gt^2/4$ . При больших значениях  $r$  никаких волн уже нет, так как при этом  $kr$  становится меньше единицы. Таким образом, величина  $r_0 \sim gt^2/4$  играет роль границы круга, внутри которого имеются волны, т. е. она соответствует видимому фронту возмущения. Этот фронт движется равноускоренно, т. е. его скорость линейно растет с  $t$ . Гребешки волн внутри круга бегут быстрее (так как  $v_\phi = 2v_r$ ) и, добегаая до фронта, исчезают.

Кроме волнового числа, полезно найти также фазу волны  $\varphi$ , которая определяется естественным соотношением  $\varphi = \omega t - kr$ . Подставляя сюда выражения для  $\omega = \sqrt{gk}$  и  $k$  из (2.71), получим

$$\varphi = \frac{g t^2}{4r}. \quad (2.72)$$

Отсюда еще раз можно увидеть, что на очень больших расстояниях фаза остается малой, так что никаких гребешков там нет: фаза не успевает «набежать» на величину порядка  $\pi$ .

**3. Черенковское излучение.** Вероятно, многим приходилось наблюдать либо с высокого берега, либо с самолета красивую систему волн за движущейся лодкой или кораблем. Она представлена на фотографии рис. 19, *a* и на первый взгляд кажется очень сложной. Но на самом деле это всего лишь черенковское излучение волн телом, движущимся со скоростью, большей фазовой скорости, и вся сложность картины возникает исключительно из-за дисперсии.

Хорошо известно, что в среде без дисперсии черенковское излучение возникает как результат сложения элементарных волн от отдельных импульсов, которые создает пролетающая частица. На рис. 20, *a* показана хорошо известная картина образования плоского фронта при сложении этих элементарных волн. Если скорость частицы равна  $v_0$ , а фазовая скорость волн  $v_\phi$ , то, как

видно из рис. 20, *a*, волны излучаются под таким углом  $\theta$ , что

$$\cos \theta = \frac{v_{\phi}}{v_0}. \quad (2.73)$$

Так как  $\cos \theta = k_z/k$ ,  $\omega = v_{\phi}k$ , то это хорошо известное условие черенковского излучения можно записать в виде  $\omega - k_z v_0 = 0$ , откуда видно, что излучение имеет место

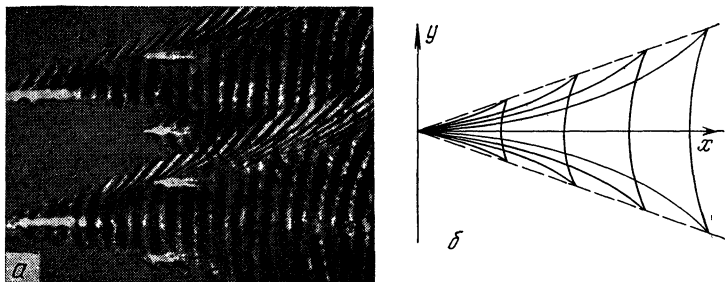


Рис. 19. *a* — Фотография волн от движущихся на параллельном курсе кораблей; *б* — вид кривых постоянной фазы

при совпадении скорости частицы с продольной компонентой фазовой скорости:

$$v_{\phi z} = \omega/k_z = v_0.$$

Рассмотрим теперь черенковское излучение волн на глубокой воде. Опять можно сказать, что движущееся тело создает ряд точечных импульсов, от которых разбегаются волны. Но теперь эти волны заполняют целые круги, и картина волнового поля становится более сложной. Тем не менее, располагая решением задачи об излучении волн мгновенным точечным источником, мы вполне можем в ней разобраться.

Заметим прежде всего, что те линии впадин и гребешков, которые мы наблюдаем за движущимся телом, есть линии постоянной фазы. Следовательно, если мы хотим построить сеть волн аналитически, нам нужно найти уравнение для линий постоянной фазы тех волн, которые получаются суперпозицией волн от отдельных



импульсов. При этой суперпозиции опять амплитуда волн не мала только там, где они складываются в одной фазе, как и при обычном черенковском излучении.

Рассмотрим рис. 20, б, на котором показано, как складываются две близкие круговые волны с одной и той же фазой. Если вторая волна излучена спустя промежуток времени  $\Delta t$  после первой, то центр ее окружности смещен на  $v_0 \Delta t$  влево, а радиус второй волны меньше радиуса первой на  $v_\phi \Delta t$ . Складываясь, волны усиливаются на касательной (огibaющей) к волнам и уничтожаются из-за интерференции с волнами в других фазах в остальных точках. Как видно из рисунка, волновой вектор опять направлен таким образом, что выполняется условие черенковского излучения  $\cos \theta \equiv k_z/k = v_\phi/v_0$ .

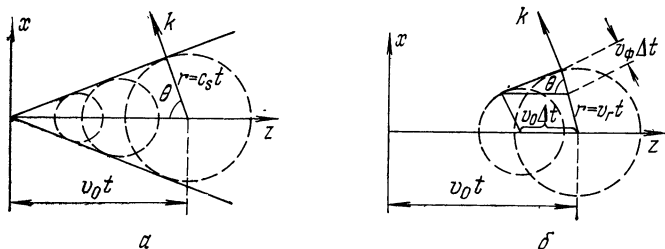


Рис. 20. Сложение волн от движущегося источника в среде без дисперсии (а) и с дисперсией (б)

Мы видим, что это условие определяется только фазовой скоростью. Но положение точки в пространстве, где находится данный волновой пакет, задается групповой скоростью, как видно из рис. 20, б. Следовательно, радиус окружности  $r$ , на которой находится волна, равен

$$r = v_r t = \frac{1}{2} v_\phi t = \frac{1}{2} v_0 t \cos \theta. \quad (2.74)$$

Координаты рассматриваемой точки в системе, в которой излучающее тело находится в точке  $(0, 0)$ , равны, очевидно,  $x = r \sin \theta$ ,  $z = v_0 t - r \cos \theta$  (см. рис. 20, б). Вспомним теперь, что фаза  $\phi$  для волн, уходящих за время  $t$  на расстояние  $r$  от источника, определяется выражением (2.72), т. е.  $\phi = gt^2/4r$ . Тогда с помощью этого соотношения и формулы (2.74) мы можем

выразить координаты точки наблюдения через фазу  $\varphi$  в данной точке и угол  $\theta$ , который образует волновой вектор  $\mathbf{s}$  с осью  $z$ :

$$x = r \sin \theta = \frac{v_0^2 \varphi}{g} \sin \theta \cos^2 \theta, \quad (2.75)$$

$$z = v_0 t - r \sin \theta = \frac{v_0^2 \varphi}{g} (2 - \cos^2 \theta) \cos \theta. \quad (2.76)$$

Если мы теперь зафиксируем фазу  $\varphi$ , то эти соотношения будут представлять не что иное, как уравнение для волн в параметрической форме: при изменении  $\theta$  от  $\pi/2$  до нуля мы прорисуем всю линию с данной фазой. Как видно из (2.75), (2.76), при таком изменении  $\theta$  координата  $x$  сначала увеличивается, а затем спадает до нуля. Сами кривые постоянной фазы имеют вид, представленный на рис. 19, б. Все они подобны друг другу, и если изобразить сетку гребней (т. е. линий с интервалом  $\Delta\varphi = 2\pi$ ), то мы получим как раз ту картину, которая изображена на фотографии рис. 19, а.

Качественно эта картина выглядит как наложение двух типов волн. Один из них соответствует коротковолновым косым волнам, расходящимся от следа тела к периферии. У этих волн фазовая скорость значительно меньше скорости тела, и поэтому условие черенковского резонанса  $\cos \theta = v_\varphi/v_0$  выполняется для них при почти поперечном направлении, когда угол  $\theta$  близок к  $\pi/2$ . Второй тип гребешков соответствует как бы одной волне, бегущей вслед за телом с фазовой скоростью  $v_\varphi = v_0$ . Для этой волны  $k = g/v_0^2$ , она все время находится в резонансе с телом и движется вместе с ним.

Как видно из рис. 20, б и из формул (2.75), (2.76), все волны заключены внутри некоторого угла  $2\theta_0$ , который можно найти, приравняв нулю  $dx/d\theta$  и определяя затем  $\theta_0$  из соотношения  $\operatorname{tg} \theta_0 = x/z$ . Оказывается, что  $\theta \approx 18^\circ$ .

Таким образом, на глубокой воде, независимо от размеров и скорости равномерно движущегося тела, за ним всегда бежит одна и та же универсальная сетка из черенковски излучаемых волн. Структура этой сетки полностью определяется законом дисперсии волн на глубокой воде.

Не менее интересная картина получается для черенковского излучения капиллярных волн. Для них закон дисперсии  $\omega^2 = (\sigma/\rho) k^3$  приводит к обратному соотношению между групповой и фазовой скоростями, а именно групповая скорость больше фазовой,  $v_r = (3/2)v_\phi = (3/2) \times \sqrt{\sigma k/\rho}$ . Соответственно вместо (2.74) получаем  $r = (3/2)v_0 t \cos \theta$ . С помощью этого соотношения и  $r/t = v_r = (3/2) \sqrt{\sigma k/\rho}$  находим выражение для фазы:  $\varphi = -\omega t + kr = \rho r v_0^2 \cos^2 \theta / 3\sigma$ . Теперь в соотношения  $x = r \sin \theta$ ,  $z = v_0 t - r \cos \theta$  мы можем подставить вместо  $r$ ,  $t$  их выражения через  $\varphi$ , после чего получим

$$x = \frac{3\sigma\varphi \sin \theta}{\rho v_0^2 \cos^2 \theta}, \quad z = \frac{\sigma\varphi}{\rho v_0^2} \frac{2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta}.$$

Как мы видим, при  $\theta \rightarrow 0$   $x \rightarrow 0$ , а координата  $z = -(\sigma/\rho v_0^2)\varphi$  отрицательна. Следовательно, капиллярная волна бежит впереди обтекаемого тела. Соответствующее ей волновое число  $k = \rho v_0^2/\sigma$ , т. е. при этом  $\omega/k = v_0$ . Другими словами, бегущая вместе с телом волна оказывается не сзади, как в случае гравитационных волн, а впереди тела. Разумеется, это не удивительно, так как  $v_r > v_\phi$ . При  $\text{tg } \theta = 1/\sqrt{2}$  координата  $z$  обращается в нуль, а при  $\theta \rightarrow \pi/2$  волна с  $\varphi = \text{const}$  выглядит как  $x \sim \varphi^{1/3} z^{2/3}$ .

4. *Ионный звук, слабая дисперсия.* Возвращаясь к волнам в плазме, рассмотрим в качестве простейшего примера дисперсию ионного звука. Напомним его закон дисперсии:

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2}{1 + k^2/k_0^2}, \quad (2.77)$$

где  $k_0^2 = 1/d^2$ ,  $d$  — дебаевская длина экранирования. Фазовая скорость ионно-звуковых волн

$$v_\phi = \frac{c_s}{\sqrt{1 + k^2/k_0^2}} \quad (2.78)$$

убывает с увеличением  $k$ . Убывающей функцией волнового числа является и групповая скорость

$$v_r = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c_s}{(1 + k^2/k_0^2)^{3/2}}. \quad (2.79)$$

Поэтому здесь, как и в случае гравитационных волн, длинноволновые возмущения распространяются быстрее коротковолновых.

Рассмотрим теперь, как этот новый закон дисперсии проявляется в задаче о распространении волн от точечного мгновенного источника. Воспользуемся опять приближенным методом разложения возмущения на волновые пакеты. В точку  $r$  за время  $t$  может попасть только тот пакет, у которого групповая скорость  $v_r = r/t$ . Отсюда с помощью (2.79) находим значение волнового числа в данной точке:

$$k = k_0 \sqrt{\left(\frac{c_s t}{r}\right)^{2/3} - 1}. \quad (2.80)$$

Как мы видим, выражение для  $k$  определено только в дозвуковой области  $r < c_s t$ , что вполне естественно. При фиксированном  $t$  волновое число как функция  $r$  монотонно возрастает при уменьшении  $r$  от  $c_s t$  до нуля.

С помощью (2.80) нетрудно найти фазу  $\varphi = \omega t - kr$ :

$$\varphi = k_0 r \left[ \left(\frac{c_s t}{r}\right)^{2/3} - 1 \right]^{3/2}. \quad (2.81)$$

Фаза в зависимости от радиуса при фиксированном  $t$  представлена на рис. 21, а.

Если источник не вполне точечный, а несколько размытый, то гармоники с большими волновыми числами в нем будут отсутствовать и в волновом пакете коротковолновой медленно движущейся части не будет. Пакет будет выглядеть так, как показано на рис. 21, б. Наиболее интересен случай протяженных возмущений, когда практически все гармоники имеют волновые числа, много меньшие  $k_0$ , — так называемый случай слабой дисперсии. В этом случае весь пакет остается локализованным вблизи точки  $r = c_s t$ , так что на рис. 21, б область с осцилляциями позади основного импульса остается достаточно узкой.

При слабой дисперсии достаточно знать лишь закон дисперсии при малых  $k$ , так что выражение (2.77) можно приближенно представить в виде  $\omega = c_s k (1 - k^2/2k_0^2)$ . Нетрудно видеть, что при слабой дисперсии от конкретного типа волн уже мало что зависит, и для всех магнитогидродинамических волн с малыми волновыми числами картина распространения волнового пакета, в

смысле его расплывания и рассыпания на отдельные волны, будет практически одной и той же. Различие будет определяться только законом дисперсии: для противоположной дисперсии возмущения с более короткими длинами будут распространяться быстрее.

Условимся называть дисперсию отрицательной, если фазовая скорость убывает с  $k$ , и положительной, если фазовая скорость возрастает с  $k$ . По этой терминологии

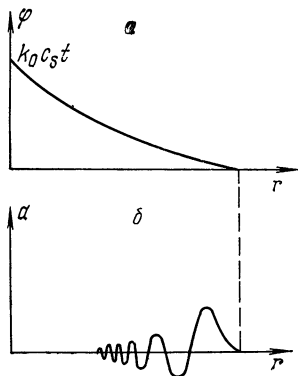


Рис. 21. Зависимость фазы (а) и амплитуды (б) от расстояния до мгновенного точечного источника с учетом дисперсии при распространении ионного звука

дисперсию ионного звука и гравитационных волн следует считать отрицательной, а капиллярных и косых магнитозвуковых волн — положительной.

При слабой дисперсии, когда фазовая скорость начинает зависеть от  $k$  только при достаточно больших значениях  $k$ , фазовую скорость можно разложить в ряд по  $k$  и ограничиться первыми членами разложения. Так как в изотропной среде фазовая скорость не зависит от знака  $k$ , то в разложении должны присутствовать только четные степени  $k$  и, следовательно, можно положить  $v_\phi = c_0 (1 \pm k^2/2k_0^2)$ , где  $c_0$  — фазовая скорость длинноволновых колебаний, а  $k_0$  — некоторый параметр, который определяет характерную длину дисперсии. Знак минус соответствует отрицательной, а плюс — положительной дисперсии. При этом групповая скорость  $v_g = c_0 (1 \pm 3k^2/2k_0^2)$  возрастает или убывает с увеличением  $k$  в соответствии со знаком дисперсии. Поэтому при положительной дисперсии осцилляции обгоняют основной импульс возмущения, а при отрицательной — отстают от него. Только в этом и состоит разница в поведе-

нии линейных волн в слабодиспергирующих средах с разными знаками дисперсии.

Для слабодиспергирующих сред значительно упрощается и задача о черенковском излучении (или обтекании малых тел). Действительно, в недиспергирующей среде черенковское излучение проявляется в виде возмущения, локализованного на линии Маха (рис. 20, а), где отдельные элементарные волны, складываясь, приводят к распространению некоторого плоского импульса. Если имеется слабая дисперсия, то этот импульс начинает медленно расползаться на отдельные гармоники, так что от основного импульса начинают отходить небольшие осцилляции (за фронтом волны при отрицательной дисперсии и перед фронтом при положительной дисперсии). Этот отход осцилляций происходит точно таким же образом, как в волне от импульсного плоского источника. Другими словами, задача об обтекании сводится к задаче о точечном мгновенном источнике.

#### § 4. Электромагнитные волны в плазме

1. *Диэлектрическая проницаемость, дисперсионное уравнение.* Выше при рассмотрении магнитогидродинамических волн в плазме у нас преобладал газодинамический подход: мы задавали смещения частиц плазмы, затем находили силы, возникающие при таком смещении, и, наконец, определяли тип колебаний. Но те же колебания можно рассмотреть и с несколько иной точки зрения — чисто электродинамической. В самом деле, при любых движениях в плазме возникают электрические и магнитные поля, и с точки зрения электродинамики распространение волн в плазме можно рассматривать как распространение электромагнитных полей в сплошной среде. Формально математически это соответствует просто другому порядку упрощения уравнений: вместо определения полей и сил по смещениям компонент плазмы мы должны сначала найти заряды и токи в плазме из законов движения частиц при заданных полях, а затем уже рассмотреть, как такие поля могут распространяться в плазме. Такой подход, разумеется, вполне эквивалентен первому, но, будучи более общим, он позволяет взглянуть на волны в плазме с более широкой точки зрения и дает возможность более полно описать все ветви линейных колебаний в плазме.

Итак, будем рассматривать плазму как сплошную среду, в которой могут распространяться электромагнитные волны. Выпишем снова уравнения Максвелла (на этот раз с учетом тока смещения):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.82)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.83)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.84)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (2.85)$$

где  $\rho$  — плотность заряда, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (2.86)$$

которое вытекает из (2.82), (2.85).

Если речь идет о волнах малой амплитуды, т. е. линейных волнах, то величины  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  могут быть выражены линейно через поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  с помощью уравнений движения для заряженных частиц плазмы, так что уравнения Максвелла будут линейными. Их можно записать в более компактной форме, вводя в рассмотрение электрическое смещение  $\mathbf{D}$ , которое определяется соотношением

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}. \quad (2.87)$$

Соответственно уравнения (2.82), (2.85) примут вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.88)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (2.89)$$

Рассмотрим опять для простоты однородную среду, когда произвольное решение линейных уравнений представляет собой суперпозицию плоских волн вида  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Для плоской волны уравнения Максвелла становятся алгебраическими:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{B}] = - \frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (2.90)$$

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}. \quad (2.91)$$

При этом уравнения (2.84), (2.89) удовлетворяются как следствие уравнений (2.90), (2.91):

$$\mathbf{kD} = 0, \quad \mathbf{kB} = 0. \quad (2.92)$$

Если с помощью (2.91) выразить  $\mathbf{B}$  через  $\mathbf{E}$  и подставить в (2.90), то легко получить

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{kE}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0. \quad (2.93)$$

Как мы уже упоминали, вектор  $\mathbf{D}$  может быть выражен через  $\mathbf{E}$  с помощью уравнений движения для заряженных частиц. В случае плоской волны линеаризованные уравнения движения также являются алгебраическими и, следовательно,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  должны быть связаны между собой линейным соотношением. Как известно, в общем случае линейная связь между векторами может быть записана в виде

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E} \quad \text{или, в компонентах,} \quad D_\alpha = \sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \quad (2.94)$$

где  $\hat{\epsilon}$  — матрица  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . Тензор  $\hat{\epsilon}$  называется диэлектрической проницаемостью среды. При подстановке (2.94) в (2.93) мы получим систему линейных однородных уравнений, которая имеет решение только в том случае, если детерминант системы обращается в нуль:

$$\Delta \equiv \text{Det} \left\| k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta} \right\| = 0. \quad (2.95)$$

Это дисперсионное уравнение определяет частоту собственных колебаний среды, т.е. волн, которые могут распространяться в ней.

Особенно простым является случай изотропной плазмы без магнитного поля. При этом для любой волны вектор  $\mathbf{D}$  должен быть направлен вдоль  $\mathbf{E}$ , так что  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  [но коэффициент пропорциональности  $\epsilon$  может быть различным для продольной ( $\mathbf{E}$  вдоль  $\mathbf{k}$ ) и поперечной волн]. Для продольной волны согласно (2.92) имеем

$$\epsilon_{\parallel} = 0, \quad (2.96)$$

а для поперечной из (2.93) получаем

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \epsilon_{\perp}. \quad (2.97)$$



Согласно (2.97) поперечная волна в среде распространяется с фазовой скоростью  $\omega/k = c/N$ , где  $N = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$  — показатель преломления.

2. *Ионный звук, пространственная дисперсия.* В качестве простейшего примера продольной волны в плазме рассмотрим ионный звук в отсутствие магнитного поля. Дисперсионное уравнение для продольных волн дается соотношением  $\varepsilon_{\parallel} = 0$ , и, следовательно, нужно найти  $\varepsilon_{\parallel}$ . Пусть плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси  $x$ . Воспользуемся для определения  $\varepsilon$  выражением (2.87):

$$\varepsilon E_x = E_x + \frac{4\pi i}{\omega} j_x. \quad (2.98)$$

Плотность тока здесь равна  $j_x = en(v_{ix} - v_{ex})$ , т.е. определяется ионной и электронной  $x$ -компонентами скорости. Скорость  $v_{ix}$  для холодного ионного газа ( $T_i = 0$ ) получаем из уравнения движения  $m_i \partial v_i / \partial t = eE$ :

$$v_{ix} = \frac{ie}{m_i \omega} E_x. \quad (2.99)$$

Что касается электронов, то в ионном звуке они успевают принять распределение Больцмана, так что возмущение плотности электронов  $n'_e$  связано с потенциалом соотношением

$$n'_e = \frac{e\varphi}{T_e} n = \frac{ien}{kT_e} E_x, \quad (2.100)$$

где  $k$  — волновое число. Это возмущение связано со скоростью  $v_{ex}$  соотношением непрерывности

$$-i\omega n'_e + ikn v_{ex} = 0. \quad (2.101)$$

Выражая с помощью (2.100), (2.101) скорость  $v_{ex}$  через  $E_x$  и подставляя в (2.98), получим

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{k^2 T_e} - \frac{4\pi e^2 n}{m_i \omega^2} = 1 + \frac{1}{k^2 d^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad (2.102)$$

где  $\omega_{pi}$  — плазменная ионная частота, а  $d$  — дебаевский радиус. В (2.102) второе слагаемое отвечает электронному вкладу в  $\varepsilon$ , а третье — ионному.

Приравнивая  $\epsilon$  нулю, мы получим уже известное нам выражение для частоты ионного звука

$$\omega^2 = \frac{k^2 d^2}{1 + k^2 d^2} \omega_{pi}^2. \quad (2.103)$$

Использованный здесь электродинамический подход обладает тем преимуществом, что раз вычисленные выражения для вклада соответствующего сорта частиц в  $\epsilon$  могут быть использованы затем при рассмотрении других ветвей колебаний.

Из выражения (2.102) видно, что диэлектрическая проницаемость зависит как от частоты, так и от волнового числа. Зависимость от  $k$  возникает во всех случаях, когда существенную роль начинает играть тепловое движение частиц. Зависимость  $\epsilon$  от  $k$  принято называть пространственной дисперсией (по аналогии с частотной дисперсией — зависимостью  $\epsilon$  от  $\omega$ ).

3. *Ленгмюровские волны.* Ионный звук принадлежит к числу ветвей колебаний, в которых существенным образом принимают участие ионы. Нетрудно рассмотреть более высокочастотные электронные ветви, в которых движением ионов можно пренебречь. С одной такой ветвью колебаний в магнитоактивной плазме — с геликонами — мы познакомились. Рассмотрим наиболее простой тип электронных колебаний — ленгмюровские волны.

Ленгмюровские волны возникают при нарушении квазинейтральности плазмы, т. е. при смещении электронов относительно ионов. Возникающее при этом электрическое поле создает квазиупругую силу, которая стремится возвратить электроны в положение равновесия. Так как электроны значительно легче ионов, то колебания электронов под действием этой квазиупругой силы происходят при практически неподвижных ионах.

Если пренебречь тепловым движением электронов, то выражение для  $\epsilon$  и дисперсионное уравнение легко получить по аналогии с (2.102). В самом деле, для ленгмюровских колебаний вкладом ионов в  $\epsilon$  можно пренебречь, а вклад электронов будет таким же, как вклад в (2.102) холодных ионов, — достаточно лишь заменить  $m_i$  на  $m_e$ . Таким образом получаем

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (2.104)$$

Величину  $\omega_{pe}$  называют ленгмюровской частотой.

Разумеется, для описания колебаний электронов можно воспользоваться и менее формальным гидродинамическим языком. Пусть  $\xi$  — смещение электронов от положения равновесия, которое мы будем считать малым. Тогда уравнение движения для электронов запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{e}{m_e} \nabla \phi, \quad (2.105)$$

где  $\phi$  — потенциал электрического поля, определяемый соотношением

$$\Delta \phi = 4 \pi e n'. \quad (2.106)$$

Здесь  $n'$  — возмущение плотности электронов — равно

$$n' = -n \operatorname{div} \xi. \quad (2.107)$$

Беря  $\operatorname{div}$  от (2.105) и исключая  $\xi$ ,  $\phi$  с помощью (2.106), (2.107), мы получим

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} = -\omega_{pe}^2 n', \quad (2.108)$$

где

$$\omega_{pe} = \sqrt{4 \pi e^2 n / m_e}.$$

Из этого уравнения следует, что при любом нарушении квазинейтральности возникают колебания электронов с частотой  $\omega_{pe}$ . Если начальное возмущение имеет вид плоской волны с волновым числом  $k$ , то ленгмюровская волна будет плоской, причем ее фазовая скорость  $v_\phi = \omega_{pe}/k$ .

Видно, что по мере увеличения волнового числа фазовая скорость убывает и при  $k \sim 1/d$  становится порядка тепловой скорости электронов. Так как мы тепловым движением пренебрегли, то выражение (2.104) справедливо только при  $kd \ll 1$ . При приближении фазовой скорости волн к тепловой следует пользоваться кинетическим описанием плазмы.

4. *Уравнение Власова.* Для описания колебаний разреженной плазмы в условиях, когда парные столкновения не играют большой роли, Власов [56] предложил использовать кинетическое уравнение с самосогласованным полем и отброшенным членом столкновений. Для частиц заряда  $e$  и массы  $m$  в отсутствие магнитного

поля это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.109)$$

Здесь  $f$  — функция распределения частиц по скоростям, имеющая смысл плотности числа частиц в фазовом пространстве, так что  $\int f d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  равно числу частиц в объеме  $d\mathbf{r}$  со скоростями в интервале  $d\mathbf{v}$ .

Самосогласованное электрическое поле  $\mathbf{E}$ , входящее в (2.109), согласно Власову должно находиться из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e), \quad (2.110)$$

где

$$n_i = \int f_i d\mathbf{v}, \quad n_e = \int f_e d\mathbf{v},$$

а  $f_e, f_i$  — функции распределения для электронов и ионов.

Если учесть еще магнитное поле  $\mathbf{B}$ , то кинетическое уравнение с самосогласованным полем для частиц сорта  $\alpha$  должно иметь вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.111)$$

а самосогласованные электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{B}$  поля должны определяться из уравнений Максвелла, в которых в качестве плотностей электрического заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$  должны быть подставлены соответственно

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v}, \quad \mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v}. \quad (2.112)$$

Разреженную плазму, в которой парные столкновения не играют роли, называют бесстолкновительной. Соответственно бесстолкновительными называются коллективные процессы, в которых несущественна роль кулоновских столкновений. Уравнения Власова с самосогласованным полем служат основой для теоретического описания таких процессов.

5. *Затухание Ландау.* Перейдем к рассмотрению ленгмюровских волн малой амплитуды в условиях, когда существенную роль начинает играть тепловое движение частиц. Как было показано впервые Ландау [57], в этих условиях появляется совершенно новый специфический механизм затухания волн, имеющий место даже в отсутствие столкновений. Эффект затухания Ландау играет фундаментальную роль в коллективных процессах

в бесстолкновительной плазме. Поэтому, чтобы не упрощать чрезмерно существа дела, нам придется воспользоваться более строгим математическим подходом, чем это было принято в предыдущих разделах.

Предположим, что ионы создают однородный неподвижный фон с плотностью  $n = \text{const}$ , и будем считать, что ленгмюровская волна распространяется вдоль оси  $x$ , так что задача является одномерной.

Для колебаний очень малой амплитуды уравнения можно линеаризовать. Для этого достаточно положить  $f = f_0 + f'$ , где  $f_0$  — равновесная функция, а  $f'$  — отклонение от равновесия, и пренебречь квадратичным членом  $(e/m) E \partial f' / \partial v$  в (2.109). В равновесном состоянии плазма однородна и нейтральна, так что  $\int f_0 dv = n$ . В силу однородности линейные уравнения могут быть написаны для каждой компоненты разложения  $f'$  и  $\varphi$  в интеграл Фурье относительно переменной  $x$ , поэтому достаточно рассмотреть лишь эволюцию отдельной гармоники. Считая, что функции  $f'$  и  $\varphi$  имеют вид  $f'(v, t) \exp(ikx)$ ,  $\varphi(t) \exp(ikx)$ , запишем линеаризованные уравнения в виде

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + ikv f' + ik\varphi \frac{e}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (2.113)$$

$$k^2 \varphi = -4\pi e \int f' dv. \quad (2.114)$$

Естественно попытаться сначала найти собственные колебания плазмы с некоторой частотой  $\omega$ . Для этого положим

$$f'(v, t) = f_1(v) \exp(-i\omega t), \quad \varphi(t) = \varphi_1 \exp(-i\omega t).$$

Тогда из уравнения (2.113), казалось бы, имеем

$$f_1 = \frac{k}{\omega - kv} \frac{e}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} \varphi_1. \quad (2.115)$$

Подставляя это выражение в (2.114), получаем дисперсионное уравнение, связывающее собственную частоту  $\omega$  с волновым числом  $k$ :

$$\varepsilon(k, \omega) \equiv 1 + \frac{4\pi e^2}{k m_e} \int \frac{(\partial f_0 / \partial v) dv}{\omega - kv} = 0. \quad (2.116)$$

Мы здесь снова воспользовались обозначением  $\varepsilon$  для диэлектрической проницаемости плазмы.

Как мы видим, выражение (2.116) имеет особенность под интегралом, и поэтому им нельзя пользоваться, пока не указано, каким образом следует устранять расходимость. Власов [58] предложил проводить интегрирование в (2.116) в смысле главного значения, однако для этого не было достаточных оснований.

Правильный подход к решению задачи о малых колебаниях плазмы, который одновременно разрешил и трудность с расходимостью в (2.116), указал Ландау [57]. Он обратил внимание на то, что в реальной постановке задачи о малых колебаниях плазмы приходится иметь дело либо с заданными начальными данными, либо с заданными граничными условиями, и показал, как должны решаться обе задачи.

Рассмотрим, например, задачу с начальными данными. В этом случае следует считать, что при  $t < 0$  возмущение отсутствует и лишь в момент  $t = 0$  включается внешнее воздействие, которое создает некоторое начальное возмущение функции распределения  $g(v)$ . Задача состоит в определении временной эволюции возмущения. Для этого следует воспользоваться уравнениями (2.113), (2.114) с внешним источником  $g(v)\delta(t)$ , добавленным в правую часть (2.113). Для решения этой системы уравнений можно воспользоваться методом преобразования Лапласа, полагая

$$f_p(v) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f'(v, t) dt \quad (2.117)$$

и соответственно для  $\varphi(t)$ .

Умножая уравнение (2.113) с источником  $g(v)\delta(t)$  в правой части на  $\exp(-pt)$  и интегрируя по  $t$ , получаем

$$f_p = \frac{ig(v)}{ip - kv} + \frac{k}{ip - kv} \frac{e}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} \varphi_p. \quad (2.118)$$

Как мы видим, это выражение отличается от (2.115) добавлением слагаемого с  $g$  и заменой  $\omega$  на  $ip$ . Подстановка (2.118) в (2.114) позволяет найти  $\varphi_p$ :

$$\varphi_p = -i \frac{4\pi e}{k^2 \epsilon(k, ip)} \int \frac{g(v) dv}{ip - kv}. \quad (2.119)$$

По известному  $\varphi_p$  теперь нетрудно найти  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(pt) \varphi_p dp. \quad (2.120)$$

Здесь вместо  $p$  удобно перейти к переменной  $\omega = ip$  и, так как по переменной  $p$  интегрирование проводится в правой полуплоскости, по комплексной переменной  $\omega$  следует проводить интегрирование в верхней полуплоскости:

$$\varphi(t) = -i \frac{2e}{k^2} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \frac{\exp(-i\omega t)}{\varepsilon(k, \omega)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v) dv}{\omega - kv} \right] d\omega. \quad (2.121)$$

Это выражение полностью решает задачу о колебаниях плазмы, создаваемых начальным возмущением  $g(v)$ . Из него видно, что, вообще говоря, не существует определенной зависимости  $\omega$  от  $k$ : при заданном  $k$  интегрирование в (2.121) производится по всем  $\omega$ . Однако если  $g(v)$  не имеет особенностей, то асимптотика интеграла (2.121) при больших  $t$  будет определяться нулями  $\varepsilon(k, \omega)$ , т. е.  $\varphi(t) \sim \exp(-i\omega_k t)$ , где  $\varepsilon(k, \omega_k) = 0$ . Таким образом, при очень больших  $t$  из решения (2.121) выделяется ветвь плазменных колебаний с собственной частотой  $\omega_k$ , определяемой соотношением

$$\varepsilon_-(k, \omega_k) = 0. \quad (2.122)$$

Так как интегрирование в (2.121) проводится по горизонтальной прямой в верхней полуплоскости, при вычислении  $\varepsilon$  в (2.116) частоту  $\omega$  следует считать находящейся в верхней полуплоскости, т. е. при  $\omega$ , близких к действительной оси, следует положить

$$\frac{1}{\omega - kv} \rightarrow \frac{1}{\omega - kv + i\nu} \rightarrow \frac{P}{\omega - kv} - \pi i \delta(\omega - kv),$$

где  $P$  означает главное значение. Это правило обхода полюса принято называть правилом Ландау. С его учетом диэлектрическая проницаемость (2.116) оказывается комплексной:

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{k m_e} \int \frac{P}{\omega - kv} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv - \frac{4\pi e^2}{k m_e} \frac{\pi i}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \quad (2.123)$$

Наличие мнимой части в  $\varepsilon$  и соответствует затуханию Ландау, которое пропорционально производной  $\partial f_0 / \partial v$  в точке  $v = \omega/k$ , где скорость частиц совпадает с фазовой

скоростью волны. Можно сказать, что затухание Ландау связано с поглощением волны на резонансных частицах. Если электроны имеют максвелловское распределение с температурой  $T$ , то диэлектрическая проницаемость, даваемая выражением (2.123), может быть представлена в виде

$$\varepsilon = 1 + \frac{m_e \omega_{pe}^2}{k^2 T} [1 + i \sqrt{\pi} z W(z)], \quad (2.124)$$

где  $\omega_{pe}$  — ленгмюровская частота,  $z = \omega/k v_{Te}$ ,  $v_{Te} = \sqrt{2T/m_e}$  — средняя тепловая скорость, а функция

$$W(z) = \exp(-z^2) + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2 + \xi^2) d\xi. \quad (2.125)$$

Приравнивая (2.124) нулю, можно найти действительную и мнимую части комплексной частоты. При малых  $k \ll 1/d$ , где  $d$  — дебаевский радиус, величина  $z \gg 1$  и интеграл в (2.125) можно вычислить разложением по обратным степеням  $z$ . После несложных выкладок находим, что выражение для действительной части частоты имеет вид

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3T}{m_e} k^2, \quad (2.126)$$

а мнимая ее часть (т. е. декремент затухания  $\gamma$ ) равна

$$\gamma = -\omega_{pe} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{(kd)^2} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 d^2}\right). \quad (2.127)$$

Как мы видим, при малых  $kd$  декремент затухания экспоненциально мал.

При очень больших  $t$  определенный вклад в интеграл (2.121) вносит также полюс  $\omega - kv = 0$ , соответствующий свободному разлету частиц от начального возмущения, так что зависимость потенциала  $\phi$  от времени может быть довольно сложной.

6. *Волны Ван-Кампена.* Итак, ленгмюровские колебания, возбуждаемые некоторым начальным возмущением, должны затухать со временем. Однако это еще не означает, что невозможны собственные незатухающие колебания плазмы. В самом деле, вернемся к выражению (2.115), связывающему возмущение функции распределения  $f_1$  с потенциалом  $\phi_1$ . По правилу Ландау к



частоте  $\omega$  в знаменателе следует добавить малую мнимую часть,  $\omega \rightarrow \omega + iv$ , так что (2.115) можно записать в виде

$$f_1 = \frac{P}{\omega - kv} \frac{ke}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} \varphi_1 - i \pi \delta(\omega - kv) \frac{ke}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} \varphi_1. \quad (2.128)$$

Здесь  $P$  означает, что при вычислении различных интегралов, содержащих  $f_1$ , особенность следует интегрировать в смысле главного значения. Выражение (2.128) описывает возмущение функции распределения потенциалом электрического поля волны  $\varphi_1$ . Как мы видим, это возмущение тем больше, чем ближе скорость к фазовой скорости волны  $\omega/k$ . В непосредственной окрестности этой точки основной вклад дает второе слагаемое, возникшее из-за мнимой части

$$\text{Im} \frac{1}{\omega - kv + iv} = - \frac{v}{(\omega - kv)^2 + v^2} = - \pi \delta(\omega - kv)$$

при  $v \rightarrow 0$ .

Заметим, что учет затухания возмущений вследствие столкновений, который в простейшем варианте можно сделать, вводя малое слагаемое  $-v f'$  в левую часть уравнения (2.113), также привел бы к правилу Ландау для обхода полюса и, следовательно, — к точно такому же выражению (2.128). Это вполне понятно, так как оба эффекта — столкновения и конечное время нарастания возмущения — приводят к качественно одинаковому ограничению возмущения в резонансной точке.

Если подставить (2.128) в уравнение Пуассона (2.114), то как раз и получится дисперсионное уравнение Ландау. Другими словами, в ленгмюровских колебаниях при больших  $t$  остается лишь такое возмущение функции распределения (2.128), которое создается потенциалом волны.

Допустим теперь, что в начальный момент наряду с плавным возмущением  $g(v)$  в плазму вводится некоторый модулированный пучок со скоростью, в точности равной фазовой скорости волны. Если нужным образом подобрать величину и фазу этого пучка, то можно в точности скомпенсировать возмущение резонансных электронов, описываемое вторым членом в (2.128). Но при этом мы получим выражение (2.115) без  $\delta$ -функции, а следовательно, придем к дисперсионному уравнению Власова с интегралом в смысле главного значения, опи-

сывающему ленгмюровские волны без затухания. Таким образом, решение Власова также имеет определенный физический смысл: оно описывает волну с добавкой группы резонансных частиц.

Однако это решение является довольно частным: оно соответствует некоторому вполне определенному выбору плотности дополнительных частиц. Как показал Ван-Кампен [59], уравнения (2.113), (2.114) описывают гораздо более широкий класс собственных колебаний. Чтобы найти эти колебания, следует устранить ту некорректность, которая была допущена при получении выражения (2.115) для возмущения функции распределения. В самом деле, если  $\omega$  — действительная величина, то однородное уравнение для  $f_1$ ,  $(\omega - kv)f_1 = 0$  имеет нетривиальное решение вида  $\lambda \delta(\omega - kv)\varphi_1$ , где  $\lambda$  — любая константа (точнее, функция от  $\omega$  и  $k$ ). Это решение однородного уравнения должно быть добавлено к (2.115). Принимая для определенности (без нарушения общности), что интеграл от  $1/(\omega - kv)$  берется в смысле главного значения, мы должны написать для собственных колебаний вместо (2.115) соотношение

$$f_1 = \frac{P}{\omega - kv} \frac{ke}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} \varphi_1 + \lambda \delta(\omega - kv) \varphi_1. \quad (2.129)$$

Подставляя это выражение в уравнение Пуассона, находим дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{4\pi e^2}{m_e k} \int \frac{P}{\omega - kv} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv + \frac{4\pi e}{k^2 |k|} \lambda = 0. \quad (2.130)$$

Так как это уравнение содержит две неизвестные величины  $\omega$  и  $\lambda$ , оно не дает однозначной связи  $\omega$  с волновым числом  $k$ . Его скорее следует рассматривать как уравнение для определения  $\lambda$  при заданном  $\omega$ . Это значит, что при данном  $k$  частота может быть совершенно произвольной, т. е. спектр собственных значений для  $\omega$  непрерывен. Другими словами, для любой частоты  $\omega$  можно подобрать такую величину  $\lambda$ , т. е. плотность резонансных частиц, при которой решение будет иметь вид незатухающей волны с данной частотой  $\omega$ . Это и есть волна Ван-Кампена. Каждая из волн Ван-Кампена представляет собой модулированный поток частиц, движущийся со скоростью, равной фазовой скорости волны  $v_{\text{ф}} = \omega/k$  [этот пучок описывается вторым слагаемым в (2.129)], вместе с сопровождающим его поляризацион-

ным облаком, возникающим в результате воздействия пучка на электроны плазмы. Возмущение  $f_1$  в этом облаке описывается первым слагаемым в (2.129).

Если длина волны возмущения достаточно велика ( $kd \ll 1$ ), а частота  $\omega$  близка к плазменной частоте, входящей в выражение (2.124), то величина  $\lambda$ , определяемая выражением (2.130), очень мала, так как при этом сумма первых двух слагаемых в (2.130) близка к нулю. В этом случае мы имеем дело с плазменной волной с малой добавкой резонансных частиц. Собственно волнами Ван-Кампена целесообразно считать решения, заметно отличающиеся от ленгмюровских волн, когда второе слагаемое в (2.129) больше или сравнимо с первым. Таким образом, грубо можно сказать, что собственные колебания электронной плазмы состоят из волн Ван-Кампена — модулированных пучков — и ленгмюровских волн.

Ван-Кампен показал, что система функций (2.129) является полной, т. е. любое начальное возмущение  $g(v)$  может быть разложено по этим функциям, и, следовательно, возбуждаемые в плазме волны можно рассматривать как суперпозицию собственных колебаний. Соответствующее решение в точности совпадает с решением Ландау.

При учете волн Ван-Кампена в несколько ином свете предстает и затухание Ландау. В самом деле, рассмотрим, например, возмущение с характерной длиной волны, много меньшей дебаевского радиуса. Такое возмущение является суперпозицией собственно волн Ван-Кампена, и не удивительно, что оно будет затухать со временем из-за расползания по фазам составляющих его собственных колебаний. Можно сказать, что это затухание является следствием непрерывности спектра собственных значений  $\omega$ .

В ленгмюровских волнах картина несколько сложнее, так как большая часть частиц совершает здесь совместное движение в колебаниях. Однако резонансные частицы продолжают расползаться, и их вес в коллективном движении настолько велик, что они полностью «растаскивают» ленгмюровскую волну по фазам, т. е. волна опять затухает. Легко видеть, что это — снова результат непрерывности спектра собственных значений частоты.

7. *Волны в холодной плазме.* До сих пор мы рассматривали продольные волны в плазме. Аналогичным образом можно рассмотреть и поперечные волны. В частности, в холодной плазме без магнитного поля диэлектрическая проницаемость для поперечной волны имеет тот же вид, что и для продольной, т. е.  $\varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$ , и согласно (2.97) мы получаем

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (2.131)$$

Отсюда находим выражение для частоты

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2. \quad (2.132)$$

Как мы видим, распространяться в плазме могут лишь волны с частотой, большей плазменной. В области непрозрачности  $\omega < \omega_{pe}$  волновое число  $k$  согласно (2.132) является мнимым, т. е.  $k = i\kappa$ . Величина  $\kappa$  определяет толщину скин-слоя, который экранирует внешние поля. Согласно (2.132)

$$\kappa^2 = (\omega_{pe}^2 - \omega^2) / c^2, \quad (2.133)$$

так что при  $\omega \ll \omega_{pe}$  глубина проникновения поперечного поля в плазму равна  $c / \omega_{pe}$ .

При наличии внешнего магнитного поля картина распространения электромагнитных волн в плазме сильно усложняется, в особенности если фазовая скорость этих волн мала и существенную роль начинает играть тепловое движение частиц. Несколько проще картина распространения волн в холодной плазме. При этом

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + \frac{4\pi i n}{\omega} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}, \quad (2.134)$$

а скорости заряженных частиц могут быть найдены из уравнений движения

$$-i\omega \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} + [\mathbf{v}_{\alpha} \boldsymbol{\Omega}_{\alpha}], \quad \boldsymbol{\Omega}_{\alpha} = \frac{e_{\alpha} \mathbf{B}}{m_{\alpha} c}. \quad (2.135)$$

С помощью (2.134), (2.135) нетрудно найти выражения для компонент тензора  $\varepsilon$ . В системе координат с осью  $z$

вдоль магнитного поля тензор  $\varepsilon$  имеет вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (2.136)$$

где

$$\varepsilon = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}, \quad g = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega (\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)},$$

$$\eta = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2},$$

$\Omega_{\alpha}$  — циклотронная частота для частицы сорта  $\alpha$ .

Мы не будем здесь подробно анализировать все волны, которые могут распространяться в плазме. Рассмотрим лишь самый простой пример альвеновской волны, распространяющейся вдоль магнитного поля. При этом  $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z = k$ . Для альвеновской волны  $\omega \ll \Omega_i$ ,  $c_A \ll c$ , так что выражения для  $\varepsilon$  и  $g$  упрощаются:  $\varepsilon \approx \omega_{pi}^2 / \Omega_i^2 = c^2 / c_A^2$ ,  $g \approx 0$ . Дисперсионное уравнение (2.95) при этом принимает вид

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\right)^2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \eta\right) = 0,$$

и частота альвеновской волны равна

$$\omega = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon}} = c_A k. \quad (2.137)$$

Как мы видим, альвеновская волна в плотной плазме соответствует сильно замедленной электромагнитной волне с огромным показателем преломления  $N = c / c_A$ .

Нетрудно было бы рассмотреть и другие ветви электромагнитных колебаний, в частности электронные. Поскольку этой теме посвящена обширная литература, мы не будем детально разбирать этот вопрос в данной книге.

## § 5. Энергия и импульс волн

1. *Волновой пакет.* Физика принадлежит к числу точных наук, однако приближенные соотношения и даже просто качественные соображения играют в ней не меньшую роль, чем точные количественные формулировки. Иногда качественные соображения даже более нужны,

поскольку они, развивая физическую интуицию, позволяют быстро достичь понимания таких явлений, количественное описание которых потребовало бы гораздо больших усилий.

Именно с такой ситуацией мы встречаемся при рассмотрении волновых процессов. Решение линейных задач методом Фурье, например разложением по плоским волнам для однородной среды, дает полное решение задачи, но еще не позволяет прямым образом получить качественную картину процесса. Более адекватным для этого является язык волновых пакетов, и с его применением мы уже познакомились в предыдущих параграфах. Здесь мы сделаем следующий шаг и от чисто качественной картины распространения волнового движения в терминах изменения фазы в пространстве и времени перейдем к количественному, но опять-таки приближенному описанию волновых явлений.

Будем опять рассуждать в терминах волновых пакетов, медленно меняющихся в пространстве и во времени. Отдельный участок такого пакета приближенно можно считать плоской волной. Электрическое поле такой волны имеет вид

$$E = e_k E \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k}r) + \text{к. с.} \quad (2.138)$$

Здесь  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\omega$  — собственная частота,  $2E$  — амплитуда колебаний электрического поля,  $e_k$  — единичный вектор поляризации волны, а к. с. означает комплексно-сопряженную величину (чтобы  $E$  было действительным). Собственная частота  $\omega_k$  является решением дисперсионного уравнения (2.95), т. е.  $\Delta(\omega, \mathbf{k}) = 0$ , а вектор поляризации  $e_k$  может быть найден из уравнений (2.93) при  $\omega = \omega_k$ . Вектор  $e_k$  может включать множитель  $\exp(i\varphi_0)$ , соответствующий постоянному сдвигу фазы  $\varphi_0$ , так что в общем случае он является комплексным. Впрочем, для волнового пакета, достаточно протяженного в пространстве, сдвиг фазы  $\varphi_0$  является несущественным. Наиболее важными характеристиками такого пакета являются величины  $\mathbf{k}$  и  $\langle E^2 \rangle$  — среднее по периоду колебаний значение квадрата электрического поля, пропорциональное плотности энергии волны в данной точке.

Естественно, что уравнения, описывающие поведение волновых пакетов со временем, должны формулироваться именно для основных величин  $\mathbf{k}$  и  $\langle E^2 \rangle$ . Первое из

этих уравнений получить довольно просто, в особенности для однородной среды. В самом деле, если мы имеем дело с почти синусоидальной волной, характеристики которой медленно меняются в пространстве и во времени, то вместо  $\mathbf{k}$ ,  $\omega_{\mathbf{k}}$  удобнее ввести фазу  $\varphi$ , являющуюся функцией  $\mathbf{r}$ ,  $t$ , так что выражение (2.138) для пакета будет иметь вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}} E \exp(-i\varphi) + \text{к.с.} \quad (2.139)$$

Скорость изменения фазы в данной точке, т. е.  $\partial\varphi/\partial t$ , очевидно, соответствует частоте колебаний, а градиент фазы соответствует волновому числу, так как он устанавливает величину и направление наискорейшего изменения фазы в пространстве. Таким образом, имеем

$$\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = -\nabla\varphi. \quad (2.140)$$

Дифференцируя второе из этих соотношений по времени и используя первое из них, находим

$$\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial t} = -\nabla\omega. \quad (2.141)$$

В однородной среде частота колебаний является функцией только  $k$ :  $\omega = \omega_{\mathbf{k}} = \omega(k)$ . Таким образом, уравнение (2.141) — дифференциальное уравнение относительно  $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$ , и с помощью его можно найти, как эволюционирует волновой вектор со временем в любой точке пространства. Например, в одномерном случае, когда волновое число  $k$  зависит только от координаты  $x$ , уравнение (2.141) имеет простой вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_{\mathbf{r}} \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (2.142)$$

где  $v_{\mathbf{r}} = \partial\omega/\partial k$  — групповая скорость. Как мы видим, волновое число пакета просто переносится с групповой скоростью.

Перейдем к нахождению уравнения для  $\langle E^2 \rangle$ . Так как эта величина пропорциональна плотности энергии волны, то представляется более целесообразным использовать именно последнюю величину как имеющую более определенный физический смысл.

2. *Энергия волны.* Допустим, что в уравнении Максвелла (2.82), кроме самосогласованного тока  $\mathbf{j}$ , который согласно (2.87) выражается через  $\mathbf{D}$ , имеется еще неко-

торый сторонний ток  $\mathbf{j}_s$ , который может совершать работу над волной. Тогда, используя обычную процедуру умножения уравнения (2.87) на  $\mathbf{E}$ , (2.83) — на  $\mathbf{V}$  и их сложения, нетрудно получить уравнение вида

$$\frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{V}] = -\mathbf{E} \mathbf{j}_s. \quad (2.143)$$

Здесь член справа соответствует мощности внешних источников, совершающих работу против поля волны  $\mathbf{E}$ . Соответственно первое слагаемое в (2.143) можно интерпретировать как изменение энергии электромагнитного поля

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.144)$$

а второе — как перенос энергии с вектором Пойнтинга

$$\Pi = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{V}]. \quad (2.145)$$

Для простоты мы ограничиваемся здесь случаем прозрачной среды, когда поглощение энергии не происходит.

В отсутствие внешних источников поля выражение (2.143) принимает вид закона сохранения энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \Pi = 0, \quad (2.146)$$

откуда следует, что интеграл от плотности энергии  $\mathcal{E}$  по всему пространству есть величина постоянная,

$$\int \mathcal{E} d\mathbf{r} = \text{const.}$$

Уравнение (2.146) и соответствует искомому уравнению для квадрата амплитуды волны; его следует лишь привести к более простому виду, пригодному для описания переноса волнового пакета. Для волнового пакета электрическое поле, и аналогично магнитное поле, имеет вид почти монохроматической волны (2.138) с медленно меняющейся амплитудой  $E(\mathbf{r}, t)$ . Соответственно

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \left( \frac{\partial E}{\partial t} - i\omega_k E \right) \mathbf{e}_k \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \text{к. с.} \quad (2.147)$$

С другой стороны, электрическое поле  $\mathbf{E}$  можно было бы разложить в интеграл Фурье

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{e}_q E_{q\omega} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{q} d\omega + \text{к. с.}, \quad (2.148)$$



в котором «пакетность» волны, т. е. ее близость к плоской монохроматической волне, учитывалась бы только тем, что фурье-компоненты  $E_{\mathbf{q}\omega}$  были бы отличны от нуля в малых окрестностях вблизи точек  $\mathbf{q}=\mathbf{k}$ ,  $\omega=\omega_{\mathbf{k}}$ . Эти окрестности тем уже, чем ближе пакет к монохроматической плоской волне.

Из выражения (2.148) видно, что дифференцирование по времени означает в фурье-представлении просто умножение на  $-i\omega$ . В нулевом приближении, т. е. для монохроматической волны, этот множитель был бы равен просто  $-i\omega_{\mathbf{k}}$ . Однако для пакета это не так, т. е.  $-i\omega + i\omega_{\mathbf{k}} \neq 0$ , и, как видно из сопоставления с (2.147), величина  $-i(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$  соответствует производной по времени от амплитуды волны (поскольку слева  $\partial/\partial t$  соответствует  $-i\omega$ ).

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и более сложные операторы. Например, входящая в (2.143) производная  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  в фурье-представлении отвечает выражению  $-i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ , где  $\hat{\epsilon}$  — квадратная матрица  $\epsilon_{\alpha\beta}(k, \omega)$ . Для волнового пакета это выражение, очевидно, будет равно

$$-i\omega_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) + \frac{\partial}{\partial \omega} (\hat{\epsilon} \omega) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Если подставить его в соотношение (2.144), то член, содержащий  $-i\omega_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ , при сложении с комплексно-сопряженным выражением исчезает, если среда является прозрачной и матрица  $\hat{\epsilon}$  эрмитова. Остаются только члены с производными по времени, и после снятия производных получаем выражение для плотности энергии волнового пакета

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{\langle E^2 \rangle}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} (\epsilon \omega) + \frac{\langle B^2 \rangle}{8\pi}, \quad (2.149)$$

где  $\epsilon = \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^* \hat{\epsilon} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ . Или, так как  $\mathbf{B}$  может быть выражено через  $\mathbf{E}$  с помощью соотношения (2.91), имеем

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{\langle E^2 \rangle}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \epsilon \omega - \frac{c^2 k^2}{\omega} + \frac{c^2}{\omega} |\mathbf{k} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}|^2 \right). \quad (2.150)$$

Здесь производная по  $\omega$  от выражения в круглых скобках берется при значении  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$ .

Итак, мы связали среднее значение квадрата электрического поля волны с более физической величиной  $\mathcal{E}_k$  — плотностью энергии волнового пакета. Соответственно и для нормировки амплитуды волны можно выбрать величину более удобную, чем квадрат электрического поля. Как будет видно из дальнейшего, удобно взять в качестве амплитуды волны величину  $a_k$ , связанную с плотностью энергии пакета соотношением

$$\mathcal{E}_k = \omega_k a_k^2 \equiv \omega_k N_k, \quad (2.151)$$

где частота  $\omega_k$  для случая положительно определенной энергии волны считается положительной. Квадрат амплитуды  $a_k^2$  по аналогии с квантовой механикой удобно также интерпретировать как число волн  $N_k$  с данным  $k$ .

Вернемся к уравнению (2.146). По аналогии с тем, как мы преобразовывали производные по времени, можно преобразовать и производные по пространству. Так, например, производная  $\partial \mathbf{E} / \partial x$  согласно (2.138) равна

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E}{\partial x} + i k_x E \right) \mathbf{e}_k \exp(-i \omega_k t + i \mathbf{k} \mathbf{r}) + \text{к. с.},$$

а в фурье-представлении (2.148) эта производная соответствует просто умножению на  $i q_x$ . Следовательно, опять величина  $i q - i k$  соответствует пространственной производной от амплитуды волны. В частности, величина

$$-i \widehat{\omega \varepsilon} = -i (\widehat{\omega \varepsilon})_k - \frac{\partial}{\partial k} (\widehat{\omega \varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},$$

как мы видим, при действии на поле волнового пакета дает вклад, пропорциональный градиенту амплитуды колебаний. Соответственно при наличии пространственной дисперсии уравнение (2.146) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} + \text{div} \mathbf{S}_k = 0, \quad (2.152)$$

где в поток энергии  $\mathbf{S}_k$ , кроме вектора Пойнтинга, дает вклад пространственная часть первого слагаемого (2.146). Повторяя примерно те же выкладки, что и при вычислении  $\mathcal{E}_k$ , нетрудно найти выражение для  $\mathbf{S}_k$ :

$$\mathbf{S}_k = \frac{\langle E^2 \rangle}{8\pi} \frac{\partial}{\partial k} \left( \varepsilon \omega - \frac{c^2 k^2}{\omega} + \frac{c^2}{\omega} |\mathbf{k} \mathbf{e}_k|^2 \right). \quad (2.153)$$

Как мы видим,  $\mathcal{E}_k$  и  $\mathbf{S}_k$  выражаются через производные

от одной и той же функции

$$A(\mathbf{k}, \omega) = \omega \mathbf{e}_k^* \hat{\varepsilon} \mathbf{e}_k - \frac{c^2 k^2}{\omega} + \frac{c^2}{\omega} |\mathbf{k} \mathbf{e}_k|^2. \quad (2.154)$$

При  $\omega = \omega_k$  эта функция обращается в нуль, так как она получается просто умножением уравнения (2.93) на величину  $\mathbf{e}_k^*/E$ . Можно сказать, что  $A=0$  вдоль всей дисперсионной кривой  $\omega = \omega_k$ . Таким образом, вдоль этой кривой

$$dA = \frac{\partial A}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial A}{\partial \mathbf{k}} d\mathbf{k} = 0.$$

Но вдоль этой же кривой отношение  $d\omega/d\mathbf{k}$  равно групповой скорости, поэтому  $\mathbf{S}_k = \mathcal{E}_k \mathbf{v}_g$ . Следовательно, уравнение переноса энергии (2.152) волнового пакета в прозрачной среде принимает простой вид

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} + \text{div}(\mathbf{v}_g \mathcal{E}_k) = 0. \quad (2.155)$$

Это и есть искомое уравнение для квадрата амплитуды волны. Оно легко обобщается на случай, когда волна является слабо затухающей, т. е. когда у собственной частоты появляется небольшая мнимая добавка, так что  $\omega = \omega_k + i\gamma_k$  (для затухающей волны  $\gamma_k < 0$ ). Это затухание связано с антиэрмитовой частью тензора  $\hat{\varepsilon}$ , и его можно найти либо непосредственно из дисперсионного соотношения, например  $A=0$ , где  $A$  дается формулой (2.154), либо с помощью уравнения переноса энергии, в котором сохранена антиэрмитова часть  $\hat{\varepsilon}$ . В приближении малого затухания ( $\gamma \ll \omega$ ), т. е. малой мнимой части у  $\varepsilon = \mathbf{e}_k^* \hat{\varepsilon} \mathbf{e}_k$ , с помощью (2.154) при учете  $A(\omega_k, \mathbf{k}) = 0$  получаем

$$\gamma = - \frac{\text{Im} A}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} A} = - \frac{\omega^2 \varepsilon''}{\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon')}, \quad (2.156)$$

где  $\varepsilon' = \text{Re}(\mathbf{e}_k^* \hat{\varepsilon} \mathbf{e}_k)$ ,  $\varepsilon'' = \text{Im}(\mathbf{e}_k^* \hat{\varepsilon} \mathbf{e}_k)$ . Соответственно уравнение (2.155) в случае слабо поглощающей среды принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}_g \mathcal{E}_k) = 2\gamma_k \mathcal{E}_k. \quad (2.157)$$

Здесь стоит именно  $2\gamma$ , так как квадрат амплитуды затухает вдвое быстрее самой амплитуды.

3. *Импульс волны.* Кроме энергии, волновой пакет обладает определенным импульсом. Его можно было бы также найти из общих соотношений электродинамики сплошных сред, но мы используем здесь более простой и не менее общий подход, основывающийся на галилеевой инвариантности физических процессов при скоростях, значительно меньших скорости света.

Пусть волновой пакет распространяется в среде, которая сама движется с постоянной скоростью  $V$ . Пусть энергия пакета по отношению к среде, т. е. в движущейся системе отсчета, равна  $\mathcal{E}_k$ . В неподвижной системе отсчета энергия пакета  $\mathcal{E}_k^0$  будет, вообще говоря, отлична от  $\mathcal{E}_k$ , и связь между ними можно найти с помощью галилеевой инвариантности. Для этого наряду с волной рассмотрим некоторую частицу массы  $m$ , движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \mathbf{V}$ , где  $\mathbf{v}$  — относительная скорость. Энергия этой частицы равна  $\mathcal{E}_p^0 = mv_0^2/2 = mv^2/2 + m\mathbf{v}\mathbf{V} + mV^2/2$ . С точностью до постоянной величины  $mV^2/2$  энергия частицы равна  $\mathcal{E}_p^0 = \mathcal{E}_p + \mathbf{p}\mathbf{V}$ , где  $\mathcal{E}_p$  — энергия в системе отсчета, связанной со средой, а  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — импульс частицы.

Допустим теперь, что эта частица имеет возможность обмениваться с волной энергией и импульсом. Тогда, чтобы законы сохранения энергии и импульса удовлетворялись одновременно и в движущейся, и в неподвижной системах отсчета, соотношение между энергией и импульсом пакета в движущейся среде должно быть в точности таким же, как и для частицы, т. е.

$$\mathcal{E}_k^0 = \mathcal{E}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{V}. \quad (2.158)$$

Учтем теперь, что свободная частица может интенсивно взаимодействовать с волной только при выполнении условия черенковского резонанса  $\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ . При этом изменение энергии частицы по отношению к рассматриваемой среде связано с изменением ее импульса очевидным соотношением:  $\delta\mathcal{E}_p = m\mathbf{v}\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}\delta\mathbf{p}$ . Точно таким же соотношением должны быть связаны приращения энергии и импульса волнового пакета. Но так как они просто пропорциональны квадрату амплитуды и, стало быть, пропорциональны друг другу, то это значит, что  $\mathcal{E}_k - \mathbf{v}\mathbf{P}_k = 0$  при  $\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ . Так как поперечная по

отношению к  $\mathbf{k}$  компонента скорости частицы может быть произвольной, то отсюда следует, что импульс волны  $\mathbf{P}_k$  направлен вдоль  $\mathbf{k}$  и равен, поскольку  $\mathbf{v}\mathbf{k} = \omega_k$ ,

$$\mathbf{P}_k = \frac{k}{\omega_k} \mathcal{E}_k. \quad (2.159)$$

Итак, мы нашли искомое выражение для  $\mathbf{P}_k$ . Теперь мы видим, почему имеет смысл введение величины  $N_k$  — числа волн в пакете. С ее помощью энергия и импульс пакета выражаются очень просто:

$$\mathcal{E}_k = \omega_k N_k, \quad \mathbf{P}_k = k N_k. \quad (2.160)$$

Соответственно упрощается и связь между энергией волны в движущейся и в неподвижной системах отсчета. Сравнивая (2.160) с (2.158), мы видим, что энергия волны меняется в точности так же, как и частота вследствие доплеровского сдвига, т. е.

$$\mathcal{E}_k^0 = \omega_k^0 N_k, \quad \text{где } \omega_k^0 = \omega_k + \mathbf{k}\mathbf{V}. \quad (2.161)$$

Число волн  $N_k$  и импульс  $\mathbf{P}_k$  при переходе из одной системы отсчета в другую, естественно, сохраняются.

Обратим еще раз внимание на то, что отношение энергии волны к ее импульсу равно фазовой скорости:  $\mathcal{E}_k = v_{\text{ф}} \mathbf{P}_k$ . Таким образом, чем меньше фазовая скорость, тем более «тяжелым» является волновой пакет, т. е. тем больше его импульс при одной и той же энергии. «Быстрые» волны являются и наиболее «легкими».

4. *Волны с отрицательной энергией.* На первый взгляд кажется довольно естественным считать, что энергия волнового пакета всегда положительна: ведь, как правило, на возбуждение волны приходится затрачивать энергию. Для равновесных сред положительность энергии волн может быть даже строго доказана [2]. Однако для неравновесных сред это не так, и поэтому в плазме, которая очень часто бывает неравновесной, волны нередко обладают отрицательным знаком энергии. Отрицательность энергии волнового пакета означает, что для его создания требуется не ввести энергию, а отнять некоторое количество энергии от среды.

Самый простой пример волны с отрицательной энергией возникает при рассмотрении волн в движущихся средах. Пусть плоская волна распространяется вдоль оси  $x$ , так что  $k = k_x$ , и ее частота  $\omega = \omega_k$ . Энергия такой

волны равна  $\mathcal{E} = \omega_k N$ . Допустим теперь, что вся среда приходит в движение со скоростью  $V_x = -v_0$  против направления распространения волны, т. е. влево. При этом произойдет доплеровский сдвиг частоты  $\omega_k^0 = \omega_k - kv_0$  и соответственно уменьшится энергия  $\mathcal{E}^0 = (\omega_k - kv_0) N$ . Будем увеличивать скорость среды  $v_0$ . Тогда при достижении скорости  $v_0$ , равной фазовой скорости волны, волна в неподвижной системе отсчета остановится, и ее частота, а стало быть, и энергия обратятся в нуль. Если же скорость  $v_0$  станет больше фазовой, то энергия волны изменит знак и станет отрицательной. При таком сверхзвуковом движении среды (если волна звуковая) волна сносится средой и распространяется влево, хотя по отношению к среде она распространяется вправо. Энергия такой «отстающей» волны отрицательна, т. е. для ее возбуждения нужно не передавать энергию среде, а отнимать энергию от среды.

Заметим, в частности, что известное условие Ландау для предельной скорости сверхтекучего движения гелия,  $\mathcal{E}_k - p_k v_0 > 0$ , где  $\mathcal{E}_k$  — энергия,  $p_k$  — импульс возбуждения в гелии, эквивалентно условию отсутствия возбуждений с отрицательной энергией по отношению к лабораторной системе отсчета, т. е. по отношению к стенкам капилляра, по которому течет гелий.

Учитывая знак энергии волн, можно несколько по-другому взглянуть и на явление черенковского излучения, или обтекания тел потоком. Нетрудно видеть, что условие черенковского излучения  $\omega_k - kv_0 = 0$ , где  $v_0$  — скорость частицы, или обратная ей скорость обтекающего потока, означает, что частота соответствующей волны, а следовательно, и ее энергия обращаются в нуль в системе отсчета, связанной с частицей. Можно сказать, что при обтекании тела от него отходят только волны с нулевой энергией. Это вполне естественно, так как покоящееся тело работы не совершает.

Если же тело имеет еще внутренние степени свободы и может совершать колебания, т. е. если это осциллятор с частотой  $\omega_0$ , то может происходить обмен энергией между волной и осциллятором. Он происходит при условии резонанса:

$$\omega - kv_0 = \omega_0 \quad \text{или} \quad \omega - kv_0 = -\omega_0. \quad (2.162)$$

В первом случае условие резонанса удовлетворяется

при положительной частоте  $\omega - kv_0$  волны и соответственно положительной ее энергии. При этом говорят о нормальном доплер-эффекте при резонансе. Во втором случае резонанс осуществляется для волны с отрицательной энергией, и соответственно такой резонанс принято называть аномальным. При аномальном доплер-эффекте осциллятор, излучающий волну, не теряет, а набирает энергию, поскольку волна в его системе отсчета имеет отрицательную энергию. У плазмы в магнитном поле такими осцилляторами являются заряженные частицы, совершающие циклотронное вращение. При этом  $\omega_0$  может быть равна любой гармонике циклотронной частоты, и соответственно условие резонанса имеет вид

$$\omega - k_z v_z = n\Omega_a, \quad (2.163)$$

где  $n$  — целое число, положительное для нормального и отрицательное для аномального доплер-эффекта, а  $v_z$  — скорость частицы вдоль силовой линии (или взятая с обратным знаком скорость обтекающей среды).

Мы рассмотрели только самый простой случай, связанный с движением среды, когда по отношению к среде волна имела положительную энергию. В неравновесной плазме могут встретиться и более сложные ситуации, когда даже в неподвижной среде энергия волны, определенная общим выражением (2.150), оказывается отрицательной. Разумеется, это может быть только в том случае, когда плазма далека от равновесия. Например, волны с отрицательной энергией могут существовать в плазме, удерживаемой в зеркальной ловушке (с магнитными пробками), в том случае, когда функция распределения частиц отвечает инверсной заселенности из-за того, что частицы с малой поперечной компонентой скорости в такой ловушке не удерживаются. Волны с отрицательной энергией могут быть также в плазме с пучками заряженных частиц.

**5. Параболическое уравнение.** Полученные выше уравнения (2.141), (2.157) для  $k$  и  $\mathcal{E}_k$  соответствуют приближению геометрической оптики, когда длина волны считается исчезающе малой по сравнению с характерными размерами волнового пакета. Но в принципе можно учесть малые члены порядка отношения длины волны к размеру пакета и тем самым приближенно описать дифракцию волн. Для почти монохроматической

волны эта процедура приводит к так называемому параболическому уравнению, предложенному впервые М. А. Леонтовичем [61].

Рассмотрим опять почти монохроматическую волну и для простоты допустим, что среда является изотропной, так что частота зависит только от абсолютного значения волнового числа. Представим электрическое поле волны в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{k_0} E \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x) + \text{к.с.}, \quad (2.164)$$

который отличается от (2.138) тем, что теперь в  $E$  мы учитываем медленное изменение как амплитуды, так и фазы (со временем и в пространстве). Здесь  $k_0$  — волновое число, а  $\omega_0 = \omega(k_0)$  — соответствующая ему собственная частота,  $\mathbf{e}_{k_0}$  — вектор поляризации, который мы для простоты будем считать постоянным, что справедливо для плавного пакета, когда  $k_0$  значительно больше обратного размера пакета. Будем считать, что ось  $x$  прямоугольной системы координат направлена вдоль  $k_0$ .

Комплексную амплитуду  $E$ , медленно меняющуюся в пространстве и со временем, можно разложить в интеграл Фурье:

$$E = \int E_{\kappa\nu} \exp(-i\nu t + i\kappa x) d\kappa d\nu, \quad (2.165)$$

где область интегрирования по  $\kappa \sim 1/L$ , а по  $\nu \sim 1/T$ ,  $L$  — характерный размер пакета,  $T \sim L/v_g$  — характерное время его изменения.

Если (2.165) подставить в (2.164), то само поле  $\mathbf{E}$  будет представлено в виде интеграла Фурье, причем его компонента  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$  оказывается равной  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \mathbf{e}_{k_0} E_{\kappa\nu}$  при  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \kappa$ ,  $\omega = \omega_0 + \nu$ . Но в фурье-разложении  $E$  могут присутствовать лишь те гармоники, у которых частота  $\omega$  совпадает с собственной частотой, т. е.  $(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 0$ . Отсюда следует, что  $(\omega_0 + \nu - \omega_{k_0 + \kappa}) E_{\kappa\nu} = 0$  и, следовательно, имеет место соотношение

$$\int (\nu - \omega_{k_0 + \kappa} + \omega_{k_0}) E_{\kappa\nu} \exp(-i\nu t + i\kappa x) d\nu d\kappa = 0. \quad (2.166)$$

Так как  $\kappa$  мал, то мы разложим  $\omega_{k_0 + \kappa} - \omega_{k_0}$  в ряд по  $\kappa$  и учтем члены до второго порядка включительно.



По предположению,  $\omega_k$  зависит только от абсолютной величины  $k$ , и поэтому

$$\begin{aligned} \omega_{k_0 + \kappa} \approx \omega_{k_0} + (|k_0 + \kappa| - k_0) v_r + \\ + \frac{1}{2} |k_0 + \kappa| - k_0)^2 v_r', \end{aligned} \quad (2.167)$$

где

$$v_r = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad v_r' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2},$$

$$|k_0 + \kappa| = \sqrt{(k_0 + \kappa_x)^2 + \kappa_z^2} \approx k_0 + \kappa_x + \frac{\kappa_z^2}{2k_0}.$$

Если подставить эти выражения в (2.166) и учесть, что  $v = i\partial/\partial t$ ,  $\kappa = -i\partial/\partial r$ , то получим уравнение для комплексной амплитуды:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + i v_r \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{v_r}{2k_0} \Delta_{\perp} E + \frac{v_r'}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0. \quad (2.168)$$

Это и есть параболическое уравнение. Если отбросить два последних малых слагаемых, то мы получим уравнение переноса  $\partial E/\partial t + v_r \partial E/\partial x = 0$  в приближении геометрической оптики. С учетом же этих членов достигается более точное описание пакета, в которое приближенно включаются дифракционные эффекты.

## § 6. Волны в неоднородных средах

1. *Квазиклассическое приближение.* Если плазма является неоднородной, то проблема описания ее колебаний существенно усложняется. С математической точки зрения это усложнение состоит в том, что теперь приходится иметь дело с дифференциальными (или интегральными) уравнениями с переменными коэффициентами, решение которых сопряжено с большими вычислительными трудностями. Но кроме этого чисто формального усложнения, которое заключается в более утомительном описании тех же ветвей колебаний, которые имелись у однородной плазмы, проблема колебаний неоднородной плазмы структурно становится гораздо сложнее из-за того, что могут появиться, и действительно появляются, новые, подчас довольно неожиданные, ветви колебаний неоднородной плазмы, в частности неустойчивые ветви. Поэтому в теорию колебаний неоднород-

ной плазмы должна быть включена вся теория неустойчивостей, представляющая к настоящему времени самостоятельную обширную область теории плазмы. Ясно, что ее содержание далеко выходит за рамки настоящего параграфа, и здесь мы вынуждены ограничиться только краткими комментариями.

Среди различных ветвей колебаний неоднородной плазмы, естественно, содержатся и те ветви, которые имеются у однородной плазмы. Если длина волны соответствующих волн значительно меньше характерных размеров плазменного образования, то для описания их распространения может быть использован формализм волновых пакетов. Соответствующее приближение, хорошо известное под названием квазиклассического или геометрически-оптического, является достаточно универсальным и применимо практически к любым волнам, в особенности если речь идет о средах с одномерной неоднородностью.

Пусть, например, параметры плазмы изменяются в зависимости только от координаты  $z$ , а волновой вектор  $\mathbf{k}$  имеет компоненты  $k_x$  и  $k_z$  (так что  $k_y=0$ ). Тогда собственная частота колебаний, которая может быть найдена из локального дисперсионного уравнения в приближении однородной среды, является функцией  $\omega = \omega(k_x, k_z, z)$ . Допустим, что рассматривается задача о распространении волны от гармонического источника, совершающего колебания с частотой  $\omega_0$ . После того как соответствующее волновое поле установится в пространстве, волновое число должно быть стационарным в каждой точке пространства, так что согласно (2.141)  $\nabla \omega = 0$ , т. е.

$$\omega(k_x, k_z, z) = \omega_0 = \text{const.}$$

Если пакет очень широкий, то при фиксированном  $z$  компоненты  $k_x$  и  $k_z$  должны быть постоянными и не должны зависеть от  $x$ . А так как волновое поле  $\mathbf{k}$  является безвихревым,  $\mathbf{k} = \nabla \varphi$ , то  $\partial k_x / \partial z = \partial^2 \varphi / \partial z \partial x = \partial k_z / \partial x = 0$ , т. е. из независимости  $k_z$  от  $x$  вытекает постоянство  $k_x$ :  $k_x = \text{const.}$  Таким образом, из соотношения  $\omega(k_x, k_z, z) = \omega_0$  вытекает, что  $k_z$  является функцией  $z$ : волновое число  $k_z$  все время «подстраивается» таким образом, чтобы локальная частота колебаний равнялась внешней частоте.

Обратимся теперь ко второму уравнению динамики волновых пакетов—уравнению переноса энергии (2.155). В стационарном одномерном случае оно принимает вид  $\partial(v_{gz} \mathcal{E})/\partial z = 0$ . Так как  $\mathcal{E}$  пропорционально квадрату амплитуды колебаний  $E^2$ , то отсюда следует  $E^2 \sim \text{const}/v_{gz}$ . Там, где групповая скорость стремится к нулю, происходит «сгущение» пакета, а его амплитуда стремится к бесконечности. Эта точка соответствует точке поворота пакета, т. е. его отражению от области непрозрачности.

Рассмотрим в качестве простейшего примера задачу о падении на плазму поперечной волны из вакуума. В данном случае

$$\omega_0^2 = \omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2.$$

Пусть волна падает на плазму снизу вверх, а плотность плазмы возрастает с увеличением  $z$ . Тогда из дисперсионного соотношения находим

$$k_z = c^{-1} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{pe}^2 - k_x^2 c^2}. \quad (2.169)$$

Как мы видим, по мере увеличения плазменной частоты  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n/m_e}$  компонента  $k_z$  уменьшается и в точке  $\omega_{pe}^2 = \omega_0^2 - c^2 k_x^2$  обращается в нуль. Так как  $\omega_0^2 = c^2(k_x^2 + k_{z0}^2)$ , где  $k_{z0}$  — значение волнового числа в вакууме, то эта точка соответствует частоте

$$\omega_{pe}^2 = \omega_0^2 \frac{k_{z0}^2}{k_x^2 + k_{z0}^2} = \omega_0^2 \sin^2 \theta, \quad (2.170)$$

где  $\theta$  — угол падения волны на плазменный слой. Точка  $k_z = 0$  (при этом и  $v_{gz} = 0$ ) соответствует точке отсечки электромагнитной волны: в более глубокие слои волна не может проникнуть из-за непрозрачности плазмы. Если угол  $\theta$  близок к  $\pi/2$ , то эта точка близка к точке плазменного резонанса  $\omega_0 = \omega_{pe}$ , в которой внешняя частота совпадает с ленгмюровской.

В результате появляется возможность так называемой трансформации волны из поперечной в продольную. Она заключается в следующем. Если электромагнитная волна поляризована таким образом, что ее электрическое поле лежит в плоскости  $(x, z)$ , то вблизи точки отсечки, где  $k_x \gg k_z$  и поперечная волна распространяется почти вдоль оси  $x$ , ее электрическое поле оказывается на-

правленным вдоль  $z$ . За точкой отражения, где  $k_z$  становится мнимым, электрическое поле экспоненциально убывает с увеличением  $z$ , однако какая-то малая его часть успевает дойти до точки резонанса  $\omega_0 = \omega_{pe}$ . В этой точке внешнее поле раскачивает ленгмюровскую волну, так что часть энергии от поперечной волны передается в продольную. Этот эффект и называется трансформацией волны. Аналогичного рода эффекты трансформации могут происходить и в других ветвях колебаний.

Квазиклассическое приближение применимо также к задаче распространения магнитогидродинамических и других типов колебаний плазмы. С учетом соответствующих граничных условий таким образом могут быть получены частоты собственных колебаний плазмы, когда вследствие отражения от границ или точек поворота в ней могут образовываться стоячие волны. Однако этот метод по существу является ограниченным; так, он не позволяет уловить одну из интереснейших особенностей спектров собственных колебаний плазмы, в частности на магнитогидродинамических ветвях, — возможность существования непрерывных спектров.

**2. Непрерывные спектры.** Квазиклассическое приближение, опирающееся на картину распространения волновых пакетов, хорошо применимо только в том случае, если эти пакеты действительно распространяются через плазму. Если же групповая скорость очень мала или вовсе обращается в нуль, как тогда должна выглядеть картина колебаний? Чтобы описать ее, начнем с самого простого случая ленгмюровских колебаний в холодной плазме. Частота  $\omega = \omega_{pe}$  таких колебаний не зависит от  $k$ , так что групповая скорость равна нулю. Посмотрим, как будут выглядеть такие колебания в неоднородной плазме.

Для описания колебаний воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 \mathbf{E} = -c^2 \text{rot rot } \mathbf{E}. \quad (2.171)$$

Это уравнение нетрудно получить, если продифференцировать по времени (2.82), затем исключить  $\mathbf{B}$  с помощью (2.83), а для плотности тока воспользоваться линеаризованным уравнением движения электронов

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -en \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = \frac{e^2 n}{m_e} \mathbf{E}.$$

Уравнение (2.171) описывает как продольные, так и поперечные волны в плазме. Для продольных волн  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , и если применить операцию ротора к (2.171), то получим  $[\nabla\varphi, \nabla n] = 0$ . Это значит, что поверхности постоянной плотности, строго говоря, должны быть эквипотенциальны.

Рассмотрим сначала именно такие колебания. Тогда  $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \nabla n$ , и уравнение (2.171) запишется в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \omega_{pe}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0. \quad (2.172)$$

Отсюда видно, что в каждой точке потенциал колеблется с частотой, равной локальной плазменной частоте. Для любого значения  $\omega = \omega_{pe}^0$  можно построить разрывное решение уравнения (2.172), когда  $\partial\varphi/\partial n = \delta(n - n^0)$ , т. е. потенциал является ступенчатой функцией с разрывом в точке, отвечающей выбранному значению собственной частоты. Колеблется только тонкий слой электронов вблизи поверхности  $n = \text{const}$ , отвечающей заданной частоте  $\omega$ , и при таких колебаниях он является гармонически колеблющимся двойным электрическим слоем. Итак, мы видим, что данной задаче отвечает непрерывный спектр колебаний, колебания могут происходить на любой плазменной частоте от  $\omega_{pe \text{ max}}$  до  $\omega_{pe \text{ min}}$ , которые определяются соответственно максимальной и минимальной плотностями электронов.

Если в плазменном сгустке произвести некоторое начальное возмущение, при котором все электроны смещаются в одну сторону, то сначала электроны будут колебаться совместно около положения равновесия. Со временем, однако, фазы колебаний отдельных слоев начнут расходиться друг от друга. Другими словами, согласно уравнению  $\partial\mathbf{k}/\partial t = \nabla\omega$  волновой вектор будет линейно возрастать со временем:  $\mathbf{k} = t \nabla\omega_{pe}$ , причем тем быстрее, чем больше градиент плотности в данной точке. Образно говоря, возникает «ветер» в  $k$ -пространстве. Вследствие возрастания  $k$  амплитуда колебаний электрического поля будет монотонно падать, так как будет уменьшаться область с одной фазой колебаний.

Рассмотренная картина является типичной для системы с непрерывным спектром, каковой является неоднородный сгусток плазмы по отношению к ленгмюров-

ским колебаниям. Затухание же колебаний из-за разбегания фаз сходно с затуханием Ландау, где то же явление имело место в пространстве скоростей, в котором разбегались по фазам волны Ван-Кампена, также имевшие непрерывный спектр.

Рассмотрим теперь ленгмюровские колебания более общего вида. Допустим, что длина волны таких колебаний много меньше, чем  $c/\omega_{pe}$ . Тогда в уравнении (2.171) правую часть формально следует считать большой по сравнению с левой, и его можно решать методом последовательных приближений. В нулевом приближении имеем  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Для получения следующего приближения, как обычно, следует потребовать, чтобы малая левая часть удовлетворяла условию ортогональности к решению однородного уравнения нулевого приближения. В данном случае это условие сводится к равенству нулю дивергенции левой части, т. е.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \phi + \operatorname{div} (\omega_{pe}^2 \nabla \phi) = 0. \quad (2.173)$$

Допустим опять, что плотность  $n$  зависит только от координаты  $z$ , и будем искать решение в виде  $\phi(z) \exp(-i\omega t + ikx)$ . Тогда для линейного профиля плотности  $n = n_0 [1 - (z/L)]$  уравнение (2.173) примет вид

$$\frac{d}{dz} \left( v^2 + \frac{z}{L} \right) \frac{d\phi}{dz} - k^2 \left( v^2 + \frac{z}{L} \right) \phi = 0, \quad (2.174)$$

где  $v^2 = (\omega^2 - \omega_{pe}^2) / \omega_{pe}^2$ ,  $\omega_{pe}^0 = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_e}$ . Это уравнение также имеет непрерывный спектр собственных значений [64а].

Для ленгмюровских колебаний непрерывный спектр является следствием нулевой групповой скорости. В результате этого все колебания носят локальный характер и никуда не переносятся со временем. Оказывается, что аналогичное явление может иметь место для других ветвей колебаний, в частности для магнитогидродинамических.

В самом деле, рассмотрим, например, альвеновскую волну. У такой волны, как мы знаем, групповая скорость направлена вдоль магнитного поля. Поэтому в слое плазмы, в котором альвеновская скорость зависит, скажем, от поперечной координаты  $x$  (например, из-за зависимости массовой плотности от  $x$ ), но слой однороден

вдоль магнитного поля, будет иметь место практически такой же эффект, как для ленгмюровских волн. Действительно, поскольку поперечная компонента групповой скорости равна нулю, волны в соседних слоях не будут влиять друг на друга, распространяясь вдоль магнитного поля каждая со своей локальной альвеновской скоростью.

В результате любое начальное возмущение будет рассыпаться на отдельные разбегающиеся по фазам слоистые волновые пакеты и суммарная амплитуда колебаний будет как бы затухать со временем.

Этот эффект был обнаружен экспериментально при наблюдении распространения альвеновской волны на плазменном шнуре, образуемом при  $\theta$ -пинчевом схлопывании плазмы. С помощью небольшого импульсного возмущения поперечного магнитного поля можно создавать начальное смещение плазменного шнура, которое потом должно было бы разбежаться в стороны в виде импульсов, соответствующих альвеновской волне. Однако в действительности возмущения очень быстро затухают и практически не распространяются вдоль шнура. Этот факт был объяснен неоднородностью плотности плазмы поперек шнура [66], в результате которой возмущения на разных расстояниях от оси бежали вдоль шнура с разными скоростями и быстро разбежались по фазам. Проведенные впоследствии специальные эксперименты по эволюции во времени начальных периодических поперечных возмущений плазменного шнура в магнитном поле [67] показали хорошее соответствие с теорией, основанной на непрерывности спектра альвеновских волн.

Оказывается, что непрерывность спектра собственных колебаний неоднородной плазмы имеет место и для других ветвей магнитогидродинамических волн [68, 68а, 68б]. Этот результат может быть получен на примере цилиндрического плазменного столба с током в продольном магнитном поле. В таком шнуре магнитное поле имеет продольную  $B_z$  и азимутальную  $B_\theta$  компоненты. Если рассмотреть возмущение с винтовой симметрией вида  $\exp(ik_z z + im\theta)$ , то альвеновской волне будет соответствовать частота

$$\omega_A^2 = c_A^2 k_{\parallel}^2 = \frac{1}{4\pi n m_i} \left( k_z B_z + \frac{m}{r} B_\theta \right)^2.$$

Эти волны, как мы уже обсуждали выше, бегут независимо друг от друга в виде тонких цилиндрических слоев. Оказывается, что и замедленная волна имеет непрерывный спектр [68a]. Для такой сильно локализованной волны в квазиклассическом дисперсионном уравнении типа (2.21) следует устремить  $k$  к бесконечности, и тогда в пределе получается дисперсионное уравнение замедленной волны

$$(c_A^2 + c_s^2) \omega^2 - c_A^2 c_s^2 k_{\parallel}^2 = 0. \quad (2.175)$$

Итак, вместе с альвеновской волной существуют две ветви МГД-колебаний с непрерывным спектром. Эти ветви, строго говоря, не могут быть описаны с помощью квазиклассического приближения, поскольку они соответствуют особым поверхностям, где квазиклассическое приближение неприменимо. Существование непрерывных спектров принадлежит к весьма интересным свойствам одножидкостной магнитной гидродинамики.

Мы здесь полностью обошли молчанием неустойчивые ветви колебаний плазмы, обсуждение которых будет отложено до гл. 5.



# Г Л А В А 3

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

### § 1. Простые волны

1. *Пучок невзаимодействующих частиц.* Нелинейные колебания непрерывных сред являются, конечно, гораздо более сложными, чем рассмотренные нами выше линейные. Прежде всего здесь отсутствует принцип суперпозиции, и поэтому, грубо говоря, нелинейных процессов «гораздо больше», чем линейных. Соответственно и физика нелинейных явлений намного богаче.

Чтобы постепенно и естественным образом войти в область нелинейных явлений, целесообразно начать с самых простых нелинейных эффектов, являющихся обобщением рассмотренных ранее линейных. Прежде всего представляется естественным исследовать, что́ будет происходить с плоскими бегущими волнами по мере увеличения их амплитуды. Как мы увидим ниже, ситуация здесь оказывается существенно различной для диспергирующих сред и сред без дисперсии. Обращаясь к низкочастотным волнам в плазме, предпочтительнее начинать с волн без дисперсии, а затем, включив в рассмотрение слабую дисперсию, исследовать ее влияние на нелинейные волны. Такой подход является достаточно общим, он применим ко всем ветвям колебаний со слабой дисперсией, в частности ко всем магнитогидродинамическим волнам в плазме.

Прежде чем переходить к собственно волнам, удобно рассмотреть следующую очень простую модель. Пусть имеется неограниченный по оси  $x$  пучок невзаимодействующих частиц. Скорость каждой частицы  $v$  остается постоянной, так что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.1)$$

Совокупность невзаимодействующих частиц, разумеется, не является нелинейной системой, однако уравне-

ние (3.1) внешне выглядит как нелинейное и имеет, как мы увидим, решения, обладающие характерными свойствами нелинейных волн.

Рассмотрим сначала малые колебания однородного пучка с постоянной скоростью  $v_0$ :  $v = v_0 + v'$ . Полагая  $v' = v' \exp(-i\omega t + ikx)$  и линеаризуя (3.1), получим дисперсионное соотношение для линейных волн

$$\omega = kv_0. \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что в линейном приближении мы имеем дело с недиспергирующей средой:  $v_\phi = \omega/k = \text{const}$ . Допустим теперь, что на пучок накладывается некоторое начальное возмущение скорости, которое имеет вид  $a \sin kx$ . Эволюцию этого возмущения удобно рассмотреть в движущейся со скоростью  $v_0$  системе отсчета, полагая

$$x = x' + v_0 t, \quad v = v_0 + u.$$

В этой системе имеем (опуская штрих у  $x'$ )

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

Удобнее всего проследить за пучком с помощью фазовой плоскости  $(x, u)$ , на которой каждая точка перемещается со временем со своей собственной скоростью (рис. 22). Таким образом, верхняя полуплоскость движется вправо, нижняя — влево, причем скорость любой точки пропорциональна ее удалению от оси  $x$ . Начальное состояние пучка представляется на этой плоскости синусоидой, а затем эта кривая искажается, двигаясь вместе с фазовой плоскостью. Соответственно искажается и профиль волны: частицы со скоростью  $u > 0$  забегают вперед, а с  $u < 0$  отстают от волны. В результате волна постепенно становится круче, и в конце концов производная  $du/dx$  обращается в бесконечность на ее переднем

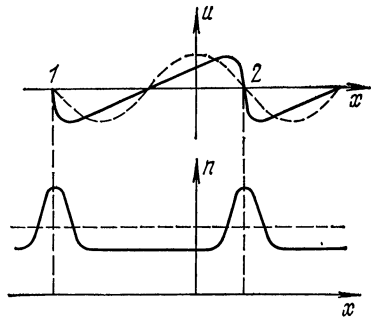


Рис. 22. Опрокидывание волны в пучке свободных частиц

стостью. Соответственно искажается и профиль волны: частицы со скоростью  $u > 0$  забегают вперед, а с  $u < 0$  отстают от волны. В результате волна постепенно становится круче, и в конце концов производная  $du/dx$  обращается в бесконечность на ее переднем

фронте. В следующий момент происходит опрокидывание волны, и функция  $u(x)$  перестает быть однозначной, у нее появляются точки поворота, т. е. образуются встречные пучки. Со временем эти точки поворота раздвигаются, и число встречных пучков неограниченно возрастает. По прошествии достаточно большого промежутка времени число пучков с разными скоростями становится настолько велико, что можно приближенно говорить о функции распределения частиц по скоростям  $f(u)$ .

Интересно проследить за изменением плотности частиц  $n$ . Легко видеть, что, как только начинается искажение профиля волны, появляется возмущение плотности: в точках 1 и 2 рис. 22 частицы сгущаются и плотность возрастает. Возникает та самая бунчировка частиц, которая используется в клистронах для генерации сверхвысокочастотных колебаний. Нарастание возмущения плотности продолжается до тех пор, пока производная  $du/dx$ , а вместе с ней и плотность в точках 1, 2 не обратятся в бесконечность. После опрокидывания профиля  $u(x)$  на зависимости плотности от  $x$  появляется удвоенное число особенностей (рис. 23). Затем, по

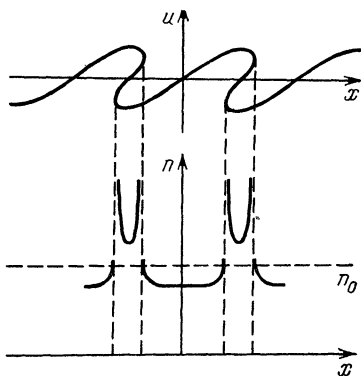


Рис. 23. Многопоточковое течение модулированного по скорости пучка

мере возрастания числа встречных пучков, происходит увеличение числа «пучков» на графике плотности одновременно с уменьшением их амплитуды, и плотность опять стремится стать однородной. В пределе можно приближенно говорить об однородном распределении частиц с функцией распределения по скоростям  $f(u)$ .

Итак, рассмотрение этого простейшего случая обнаруживает много эффектов, которые явно выходят за рамки процесса простого распространения синусо-

идальной линейной волны без искажения. А именно, происходит генерация высших гармоник, доходящая затем до «опрокидывания» волны, появляются и затем быстро нарастают возмущения плотности. Как мы уви-

дим ниже, эти процессы относятся к кругу типичных проявлений нелинейности системы.

Эта нелинейность проявляется и непосредственно в уравнении (3.3), которое удобно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.4)$$

В линейном приближении правую часть (3.4) можно отбросить, что соответствует стационарному профилю линейной волны в рассматриваемой системе координат. Если теперь, действуя в духе метода последовательных приближений, подставить в правую часть линейное приближение  $u^{(1)} = a \sin kx$ , то получим

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} = -k a^2 \sin^2 kx \cos kx = -\frac{k a^2}{2} \sin 2kx, \quad (3.5)$$

где через  $u^{(2)}$  обозначена добавка второго порядка малости. Отсюда видно, что  $u^{(2)}$  соответствует появлению второй гармоники, причем  $u^{(2)}$  линейно нарастает со временем, и спустя время  $t \sim 1/ka$  амплитуда второй гармоники дорастает до амплитуды первой. Ясно, что для промежутков времени такого порядка и больше метод последовательных приближений становится неприменимым.

Из выражений (3.4) и (3.5) несколько с другой точки зрения видно, почему для описанного выше процесса опрокидывания волны важно отсутствие дисперсии. Как видно из (3.5), вторая гармоника только потому и имеет возможность нарасти до большой амплитуды, что она все время покоится в рассматриваемой системе отсчета (т. е. движется с той же скоростью, что и линейная волна в лабораторной системе отсчета). Если была бы дисперсия, так что фазовая скорость второй гармоники отличалась бы от фазовой скорости первой гармоники на  $\Delta v_\phi = v_\phi(2k) - v_\phi(k)$ , то уравнение (3.5) следовало бы записать

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \Delta v_\phi \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = -\frac{k a^2}{2} \sin 2kx, \quad (3.6)$$

так что мы получили бы ограниченное по амплитуде решение, удовлетворяющее начальному условию  $u^{(2)}|_{t=0} = 0$ :

$$u^{(2)} = \frac{a^2}{4 \Delta v_\phi} [\cos 2kx - \cos 2k(x - \Delta v_\phi t)]. \quad (3.7)$$

При малой амплитуде  $a$  эта величина все время имела

бы второй порядок малости. При  $\Delta u_{\phi} \rightarrow 0$  выражение (3.7) после раскрытия неопределенности переходит в (3.5), т. е. методом последовательных приближений опять можно пользоваться только на ограниченном промежутке времени. Отсюда ясно видна разница между недиспергирующими и диспергирующими средами. В недиспергирующих средах все гармоники остаются в резонансе друг с другом, и поэтому возможна сильная перекачка энергии от одних гармоник к другим вплоть до опрокидывания, т. е. появления бесконечных гармоник, отвечающих возникновению особенности на профиле волны. В диспергирующих средах такая сильная перекачка, вообще говоря, должна отсутствовать.

Рассмотренная здесь простая модель пучка невзаимодействующих частиц дает возможность обсудить еще один важный эффект, который нам встретится позднее при разборе нелинейных кинетических явлений в плазме. Мы имеем в виду обратимость во времени. Как было установлено выше, при эволюции модулированного пучка во времени возникает опрокидывание волн и возникновение многопучковых состояний, причем число пучков со временем нарастает. Кажется, что в пределе образуется распределение, в котором уже почти невозможно выделить отдельные пучки и которое лучше всего можно описать функцией распределения частиц по скоростям  $f(u)$ . Но это описание не является точным. Более того, строго говоря, оно неправильно.

В самом деле, пучок невзаимодействующих частиц не содержит каких бы то ни было механизмов диссипации и является точно обратимой системой. Поэтому если в какой-то момент времени обратить все скорости, то мы должны воспроизвести всю картину эволюции пучка в обратном порядке. А именно, на однородном, казалось бы, фоне почти непрерывного распределения частиц по скоростям начнут образовываться нарастающие со временем сгустки плотности, число их будет уменьшаться, а величина нарастать, затем возникнут большие сгустки, отвечающие профилю волны скорости вблизи опрокидывания, и, наконец, мы придем к однородному распределению плотности со скоростью, модулированной по закону  $a \sin kx$ . Другими словами, мы должны вернуться к начальному состоянию, но с обратными скоростями, которое затем будет эволюционировать так же, как было описано ранее.

Можно сказать, что в многопотоковом состоянии пучка, функция распределения которого кажется почти непрерывной, в действительности сохранена вся информация о начальном состоянии, от которого он эволюционировал, и при обращении скоростей частиц вся эта информация может быть извлечена. Реально, конечно, нет возможности сразу заменить скорости всех частиц на обратные. Оказывается, однако, что имеется другая возможность извлечь заключенную в многопотоковом пучке информацию. Эта возможность — эффект эха, который мы рассмотрим в гл. 4.

2. *Простые волны.* Перейдем теперь к рассмотрению собственно простых волн в недиспергирующих средах. Простыми волнами называются особые нелинейные волны, являющиеся самым простым обобщением бегущих линейных волн. Фактически это просто бегущие волны с учетом нелинейности, которая в недиспергирующих средах приводит к их искажению со временем.

Так как мы не столько стремимся к общности и строгости изложения, сколько к выяснению качественной стороны явлений, то как типичный пример простой волны рассмотрим частный случай распространения длинноволновых возмущений ионно-звукового типа в электронно-горячей плазме. Электронную температуру плазмы можно считать постоянной в силу большой электронной теплопроводности.

Соответственно уравнения для распространения волн в такой плазме имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{T_e}{m_i} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} n v = 0, \quad (3.9)$$

где  $T_e$  — электронная температура,  $m_i$  — масса иона (температуру ионов считаем пренебрежимо малой). Уравнения (3.8), (3.9) обладают, разумеется, гораздо более широким классом решений, чем одни лишь простые волны. Поэтому прежде всего возникает вопрос, как выделить искомое решение.

Для этого вспомним, что в линейном приближении для возмущения плотности  $n'$  и скорости  $v'$  в бегущих волнах мы имеем соотношения типа  $v' = a \sin k(x - c_s t)$ ,  $n' = b \sin k(x - c_s t)$ , где  $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$  — скорость зву-

ка. Как мы видим, плотность изменяется по тому же закону, что и скорость. Можно сказать, что одна величина является функцией от другой:  $n=n(v)$ . Естественно принять, что и в нелинейной волне типа простой волны профиль будет эволюционировать таким образом, что одна из указанных величин будет оставаться функцией от другой. Поэтому для выделения решения типа простой волны положим  $n=n(v)$ . Тогда уравнения (3.8), (3.9) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c_s^2 \frac{1}{n} \frac{dn}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{dn}{dv} + n \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.11)$$

Умножая первое из этих уравнений на  $dn/dv$  и вычитая из второго, найдем, что после сокращения на  $\partial v/\partial x$

$$c_s^2 \left( \frac{dn}{dv} \right)^2 = n^2. \quad (3.12)$$

Отсюда получаем  $c_s dn/dv = \pm n$ . Подставляя это значение в уравнение (3.10) или (3.11), находим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm c_s) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.13)$$

Таким образом, мы приходим к уравнению точно такого же вида, как и для пучка невзаимодействующих частиц, с той лишь разницей, что теперь перед нелинейным членом стоит множитель  $v \pm c_s$  вместо  $v$ . Переходя в систему отчета, движущуюся со скоростью звука, мы получим в точности уравнение вида (3.3) для пучка невзаимодействующих частиц. Можно сказать, что в данном случае мы имеем дело с «пучком» невзаимодействующих фононов — звуковых возбуждений.

Отсюда следует, что для профиля скорости звуковых волн большой амплитуды также должно иметь место явление «укручивания» фронта. В обычной газодинамике это «укручивание» продолжается все время, пока скорость  $v(x)$  остается однозначной. Но как только  $\partial v/\partial x$  обратится в бесконечность, начинает формироваться ударная волна, на фронте которой происходит диссипация энергии вследствие вязкости.

Заметим, что уравнение (3.13) остается справедли-

вым и для уравнений газодинамики, когда  $c_s$  не является постоянной, а сама может рассматриваться как функция  $n$  или  $v$ . Соответствующее обобщение уравнения вполне очевидно, и мы не будем его здесь подробно рассматривать. Ясно, что при  $c_s = c_s(n)$  вывод об опрокидывании волны остается в силе.

3. *Магнитогидродинамические волны.* Аналогичным образом могут быть получены решения типа простых волн и для других типов возмущений в проводящем газе. Например, при поперечном распространении быстрой магнитозвуковой волны в плазме низкого давления имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{m_i n} \frac{\partial}{\partial x} \frac{B^2}{8\pi} = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v B = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v n = 0. \quad (3.16)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям газовой динамики с показателем адиабаты  $\gamma = 2$ , поскольку из последних двух уравнений вытекает  $B/n = \text{const}$  и, следовательно,  $B^2/8\pi \sim n^2$ . Соответственно все выводы обычной газодинамики об опрокидывании нелинейных волн автоматически переносятся и на поперечные магнитозвуковые волны.

Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для косо го распространения магнитозвуковых волн с тем же самым результатом: из-за наличия нелинейного по скорости члена и увеличения фазовой скорости при сжатии потока магнитного поля происходит «опрокидывание» волны. Несколько более своеобразная ситуация возникает лишь в случае альвеновской волны. В такой волне перемещение среды происходит поперек направления распространения волны, так что нелинейный член  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$  обращается в нуль (дифференцирование производится в плоскости постоянной фазы). Вследствие этого в несжимаемой среде ( $B^2 \ll 8\pi\rho$ ) оказывается возможным распространение альвеновских волн конечной амплитуды без искажения. Однако в более реальных случаях  $\beta \sim 1$  или  $\beta \ll 1$  альвеновская волна также «опрокидывается» из-за перекося силовых линий. Вследствие



перекося к упругому натяжению силовых линий добавляется давление из-за их сжатия, так что фазовая скорость возмущений в этом месте несколько увеличивается. В результате возмущения с большой амплитудой догоняют возмущения малой амплитуды, и происходит «прокидывание». При этом образуется так называемый вращательный разрыв — аналог ударных волн для альвеновской волны.

## § 2. Нелинейные волны в слабодиспергирующих средах

1. *Нелинейность и дисперсия.* Рассмотренный выше процесс укручивания и опрокидывания волн существенно связан с отсутствием дисперсии. Именно из-за отсутствия дисперсии все волны малой амплитуды с различными волновыми числами  $k$  распространяются с одинаковой скоростью и имеют возможность длительное время взаимодействовать между собой, так что даже небольшая нелинейность рано или поздно должна привести к накоплению искажения (если нет затухания, которое может привести к исчезновению волн до того, как успеет проявиться нелинейность).

В диспергирующих средах картина существенно изменяется. Даже при малой дисперсии фазовая скорость волн с различными  $k$  все же неодинакова, и дисперсия может конкурировать с нелинейностью, в особенности вблизи точки опрокидывания, где начинают превалировать высшие гармоники. Такие гармоники порождаются при нелинейном искажении волны и вследствие дисперсии будут обгонять основную волну или отставать от нее в зависимости от того, растет или убывает групповая скорость с увеличением  $k$ . Поэтому еще до опрокидывания волна может «расползтись» на отдельные волновые пакеты (вообще говоря, нелинейные), и ударная волна не образуется. Чтобы проследить более детально за физикой этого явления, не усложненного побочными процессами, мы рассмотрим слабодиспергирующую среду без диссипации, в которой эволюция волн определяется только нелинейностью и дисперсией, и будем считать, что нелинейность невелика.

2. *Волны на мелкой воде.* В природных условиях существует объект, легко доступный для наблюдения рас-

пространения волн в слабодиспергирующих средах, — мелкая вода. Рассмотрим слой жидкости высоты  $h_0$  над твердой поверхностью и изучим в нем гравитационные волны с длиной волны, много большей  $h_0$ . Для простоты допустим, что волны распространяются вдоль оси  $x$ , так что давление  $p$  и скорость  $v$  не зависят от переменной  $y$ . Поскольку длина волны велика по сравнению с  $h_0$ , т. е. вода мелкая, горизонтальную составляющую скорости можно считать однородной по высоте (не зависящей от  $z$ ), так что для  $v_x = v$  имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (3.17)$$

Здесь давление  $p$  можно понимать в смысле среднего его значения по высоте. Оно, очевидно, выше там, где больше высота жидкости, на величину  $(h - h_0)\rho g$  по сравнению с давлением в невозмущенном слое. Таким образом, уравнение (3.17) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.18)$$

Высота  $h$  в свою очередь определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (vh) = 0, \quad (3.19)$$

которое выражает тот факт, что скорость изменения высоты слоя  $\partial h/\partial t$  связана с разностью потоков  $hv$  через бесконечно близкие сечения  $x$  и  $x+dx$ .

Уравнения (3.18), (3.19) по форме совпадают с уравнениями газодинамики с  $\gamma=2$ . Это означает, что в линейном приближении волны на мелкой воде не имеют дисперсии, а в нелинейной волне должен иметь место эффект укручивания и опрокидывания.

Для этих уравнений также нетрудно получить решение типа простой волны. Для этого опять полагаем  $h = h(v)$  и, повторяя выкладки § 1, получаем

$$\frac{dh}{dv} = \pm \sqrt{\frac{h}{g}}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.20)$$

Если амплитуда колебаний невелика, так что  $h = h_0 + h'$ , где  $h_0$  — невозмущенная высота, а  $h' \ll h_0$ , то в уравне-

нении (3.20) можно положить

$$h \approx h_0 + \frac{dh}{dv} v = h_0 + \sqrt{\frac{h_0}{g}} v, \quad (3.21)$$

после чего с точностью до квадратичных членов оно приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( \frac{3}{2} v \pm c_0 \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Здесь  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  — фазовая скорость линейных волн. Переходя в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $+c_0$  или  $-c_0$ , и вводя обозначение  $u = \sqrt{3/2}v$ , мы опять приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.22)$$

с которым уже познакомились выше.

Таким образом, нелинейные эффекты, которые могут разыгрываться в недиспергирующих средах, можно наблюдать в любом мелком водоеме.

3. *Уравнение Кортевега — де Фриза.* Фазовая скорость очень длинных волн на мелкой воде не зависит от волнового числа  $k$  и равна просто  $\sqrt{gh_0}$ . Однако при увеличении  $k$  она должна начать изменяться, чтобы при очень больших  $k \gg 1/h_0$  перейти в зависимость  $v_\phi = \sqrt{g/k}$  для гравитационных волн. Так как при больших  $k$  фазовая скорость убывает и, кроме того,  $v_\phi$  является четной функцией от  $k$ , то при малых  $k$  она может быть представлена в виде

$$v_\phi = c_0 \left( 1 - \frac{k^2}{2k_0^2} \right), \quad (3.23)$$

где величина  $k_0$  определяет характерную «длину дисперсии», на которой изменение  $v_\phi$  становится порядка самой этой скорости. Для волн на мелкой воде, как можно показать,  $k_0 = \sqrt{3}/h_0$ . Напомним, что аналогичное разложение при малых  $k$  имеет место и для волн в плазме, у которых  $v_\phi$  убывает с увеличением  $k$ , т. е. для ионно-звуковой, альвеновской и поперечной магнитозвуковой волн. Что касается косой магнитозвуковой волны, у которой фазовая скорость растет с увеличением  $k$ , то для нее при малых  $k$  имеет место разложение вида (3.23), но со знаком плюс перед  $k^2/2k_0^2$ .

Постараемся теперь учесть дисперсию в уравнении для простых волн. Рассмотрим для определенности волну, распространяющуюся вправо, т. е. с  $v_{\phi} > 0$ , и начнем с линейного приближения. В этом приближении для такой волны в системе координат, движущейся со скоростью  $c_0$ , мы должны согласно (3.23) получить частоту  $\omega = -c_0 k^3 / 2k_0^2$ . Следовательно, соответствующее уравнение в переменных  $x, t$  должно иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_0}{2k_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3.24)$$

Второй член здесь учитывает дисперсию.

Но, с другой стороны, как мы установили выше, при конечной амплитуде возмущения уравнение должно содержать нелинейный член  $u \, \partial u / \partial x$ . В полном уравнении, в котором учтены оба эффекта, должны содержаться и нелинейный, и дисперсионный члены. Таким образом, полное уравнение, описывающее нелинейные волны на мелкой воде, а также в любой слабодиспергирующей среде с отрицательной дисперсией, должно иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0}{2k_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3.25)$$

Это уравнение было получено Кортвегом и де Фризом в 1895 г.

Для сред с положительной дисперсией следовало бы изменить знак перед последним слагаемым. Но если при этом еще сделать замену  $x \rightarrow -x$ ,  $u \rightarrow -u$ , то мы снова получим уравнение вида (3.25). Так как  $x$  у нас отсчитывается от точки  $c_0 t$ , то это значит, что в средах с положительной и отрицательной дисперсией волны распространяются зеркально симметрично по отношению к точке  $x_0 = c_0 t$ , движущейся со скоростью длинноволновых возмущений. В силу этого достаточно рассмотреть лишь случай среды с отрицательной дисперсией, например мелкую воду, а для сред с положительной дисперсией решение будет зеркально-симметричным.

4. *Периодические волны, солитоны.* Рассмотрим сначала некоторые частные решения уравнения Кортвега — де Фриза типа бегущих волн  $u = u(x - ct)$ , где  $c$  — фазовая скорость. Точнее,  $c$  — это малая добавка к ос-

новой фазовой скорости  $c_0$  в лабораторной системе отсчета. Для таких волн

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x},$$

так что (3.25) становится обыкновенным дифференциальным уравнением. Его сразу можно проинтегрировать один раз и получить

$$\frac{c_0}{2k_0^2} \frac{d^2 u}{dx^2} = a + cu - \frac{u^2}{2}, \quad (3.26)$$

где  $a$  — константа интегрирования, которую мы без ограничения общности положим равной нулю (это всегда можно сделать при помощи перехода в движущуюся систему координат). Тогда уравнение (3.26) может быть представлено в виде

$$\frac{c_0}{2k_0^2} \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\partial W}{\partial u}, \quad (3.27)$$

где

$$W = -\frac{cu^2}{2} + \frac{u^3}{6}. \quad (3.28)$$

Воспользуемся теперь очень удобной аналогией. Будем рассматривать  $x$  как время, а  $u$  как координату некоторой материальной точки. Тогда уравнение (3.27) описывает движение материальной точки массы  $c_0/2k_0^2$  в потенциальной яме глубиной  $W$ . Другими словами, (3.27) можно интерпретировать как уравнение движения для нелинейного осциллятора. Потенциальная энергия  $W$  как функция  $u$  изображена на рис. 24. Она обращается в нуль при  $u=0$ ,  $u=3c$  и достигает минимума при  $u=2c$ . При колебаниях вблизи минимума потенциальной энергии  $W$  волна является практически гармонической:

$$u = 2c + u_0 \exp [ik_0 \sqrt{2c/c_0} (x - ct)].$$

Как мы видим,  $u$  колеблется около значения  $2c$ , т. е. в системе отсчета, движущейся со скоростью  $2c$ , в которой колебания происходят около нулевого значения, волна распространяется со скоростью  $-c$  влево, как и

должно быть при отрицательной дисперсии. При этом, поскольку волновое число  $k = k_0 \sqrt{2c/c_0}$ , добавка к фазовой скорости  $-c$  равна  $-c_0 k^2 / 2k_0^2$ , как это и следует из дисперсионного соотношения.

По мере увеличения амплитуды колебаний волна становится все более и более несимметричной: как видно из графика для потенциальной энергии, «частица» будет дольше иметь малую скорость  $u$ , где упругость меньше, и быстрее проскакивать значения  $c$  с большим  $u$  (см.

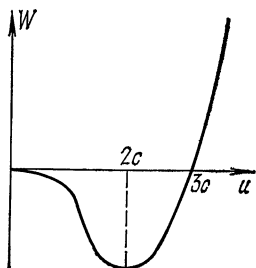


Рис. 24. «Потенциальная энергия» для периодических волн

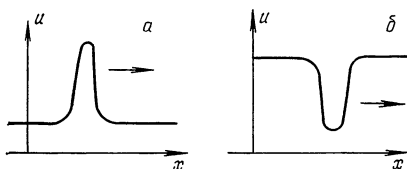


Рис. 25. Солитоны в средах с отрицательной (а) и положительной (б) дисперсиями

рис. 24). И наконец, когда амплитуда увеличится настолько, что станут возможными значения  $u=0$ , появятся исключительно интересные решения типа уединенного импульса (рис. 25, а). При этом «точка»  $u$  бесконечно долго находится в положении  $u=0$ , затем она «скачивается» в потенциальную яму  $W$ , достигает значения  $u_0=3c$ , где  $W$  второй раз обращается в нуль, отражается от нее и снова возвращается в положение  $u=0$ . Это решение называют уединенной волной или солитоном (от английского «solitary wave»). Можно проверить, что решение для солитона имеет вид

$$u = \frac{u_0}{\text{ch}^2 [(x - ct)/\Delta]}, \quad (3.29)$$

где  $\Delta$  — характерная ширина солитона. В самом деле, если мы подставим эту функцию в уравнение (3.26) с  $a=0$ , то получим

$$\frac{c_0}{2 \Delta^2 k_0^2} \left( \frac{4u_0}{\text{ch}^2 y} - \frac{6u_0}{\text{ch}^4 y} \right) = \frac{c u_0}{\text{ch}^2 y} - \frac{u_0^2}{2 \text{ch}^4 y}, \quad (3.30)$$

где  $y = (x - ct)/\Delta$ . Видно, что уравнение (3.30) удовлетворяется при

$$u_0 = 3c, \quad \Delta^2 = \frac{2c_0}{c k_0^2}, \quad (3.31)$$

откуда следует соотношение

$$\Delta^2 u_0 = \frac{6c_0}{k_0^2} = \text{const}, \quad (3.32)$$

т. е. произведение амплитуды солитона на квадрат его ширины есть величина постоянная.

Таким образом, существует однопараметрическое семейство решений типа солитонов. В качестве параметра этого семейства может быть выбрана, например, их амплитуда. При этом ширина солитона однозначно связана с его амплитудой: чем больше амплитуда солитона, тем он уже.

Следует заметить, что фазовая скорость солитонов в рассматриваемой нами среде с отрицательной дисперсией согласно (3.31) положительна, т. е. они движутся быстрее скорости звука. В солитоне происходит как бы точное уравновешивание нелинейности и дисперсии: из-за нелинейности импульс имеет тенденцию опрокинуться, но дисперсия приводит к тому, что высшие гармоники отстают от основной, и в результате солитон сохраняет постоянный во времени профиль.

Если амплитуда  $u_0$  чуть меньше  $3c$ , то скорость  $u$  до нуля не доходит и решение становится периодическим; оно соответствует как бы серии солитонов, следующих друг за другом. Это периодическое решение также является сверхзвуковым.

Таким образом, по мере возрастания амплитуды периодических решений типа бегущих волн их фазовая скорость из отрицательной становится положительной и возрастает до значения  $u_0/3$  у уединенных волн (напомним, что мы говорим о фазовой скорости в системе отсчета, движущейся со скоростью звука  $c_0$ ).

5. *Эволюция начального возмущения.* Обсудим теперь вопрос о временной эволюции колебаний, созданных начальным сосредоточенным возмущением конечной амплитуды. Для простоты ограничимся одномерным случаем, предполагая, что возмущение является бесконечно протяженным и однородным вдоль оси  $y$ .

Пусть в начальный момент  $t=0$  создается некоторое возмущение скорости с амплитудой  $u_0$  и шириной порядка  $\Delta$ . Если  $u_0 \ll c_0$ , то возмущение можно считать слабо нелинейным. В этом случае возмущение достаточно быстро, пока еще не успеет проявиться нелинейность, распадется на два, бегущих в разные стороны со скоростью, примерно равной  $c_0$ , и представляющих собой простые волны. Поэтому достаточно проследить за медленной эволюцией лишь одной простой волны, т. е. достаточно рассмотреть нестационарные решения уравнения Кортевега — де Фриза с учетом дисперсии. Отсюда, в частности, видно, почему простые волны имеют большее значение, чем какие-либо другие, быть может, даже более общие нелинейные решения: в простой волне нелинейность проявляется сильнее, так как все гармоники долго движутся совместно.

Нестационарные решения уравнения Кортевега — де Фриза вначале были исследованы численно, и только позднее была построена их аналитическая теория. Но качественная картина может быть изложена весьма просто с помощью следующих рассуждений.

Допустим сначала, что начальное возмущение по форме в точности совпадает с солитоном, т. е.  $u(t=0, x) = u_0/\text{ch}^2(x/\Delta)$ . Тогда это возмущение могло бы распространяться как солитон, если бы его амплитуда была связана с шириной соотношением (3.32):

$$\Delta^2 u_0 = \frac{6c_0}{k_0^2}. \quad (3.33)$$

Другими словами, безразмерная величина

$$\sigma = \frac{u_0 k_0^2 \Delta^2}{6c_0} \quad (3.34)$$

для солитона в точности равна 1. Но величина  $\sigma$  пропорциональна амплитуде, и поэтому ее можно рассматривать как параметр нелинейности волны: при  $\sigma \ll 1$  возмущение имеет очень малую амплитуду и его можно считать линейным, при  $\sigma = 1$  образуется уединенная волна, а при  $\sigma > 1$  амплитуда настолько велика, что вообще не существует решений типа бегущей стационарной волны.

Нетрудно видеть, почему в слабодиспергирующей



среде показателем нелинейности служит именно произведение амплитуды на квадрат ширины, а не более, казалось бы, естественная величина — отношение амплитуды волны  $u_0$  к характерной фазовой скорости  $c_0$ . Это связано с тем, что в недиспергирующей среде одномерная волна всегда является нелинейной: независимо от амплитуды она обязательно рано или поздно «опрокинется» (разумеется, если нет диссипации и волна не затухает). Именно дисперсия не дает этому произойти, и поэтому амплитуду  $u_0$  следует сравнивать не с фазовой скоростью  $c_0$  длинноволновых возмущений, а с добавкой  $c_0 k^2 / 2k_0^2 \sim c_0 / k_0^2 \Delta^2$ , связанной с дисперсией, так что показателем нелинейности служит их отношение, т. е. величина  $\sigma \sim u_0 \Delta^2$ .

Если начальное возмущение не совпадает по профилю с солитоном, а имеет вид импульса ширины  $\Delta$  и амплитуды  $u_0$ , то в качестве параметра нелинейности опять можно принять величину  $\sigma$ . При  $\sigma \ll 1$  мы имеем дело с линейным возмущением. Характер распространения волн от такого возмущения мы уже рассмотрели ранее: длинноволновая часть спектрального разложения возмущения движется со скоростью, близкой к  $c_0$ , а коротковолновые составляющие отстают от основного импульса. Импульс в целом из-за дисперсии расплывается, и его амплитуда падает. Заметим, что при этом, как следует из закона сохранения энергии  $u_0^2 \Delta = \text{const}$ , амплитуда убывает всего лишь как  $u_0 \sim 1/\sqrt{\Delta}$ . Отсюда видно, что на стадии расплывания нелинейного пакета параметр  $\sigma \sim u_0 \Delta^2$  возрастает как  $\Delta^{3/2}$ , и возмущение становится все более и более нелинейным. В результате оказывается, что из линейного возмущения при определенных условиях (которые будут выяснены ниже) может сформироваться один широкий солитон и дисперсионный линейный «хвостик».

Большой интерес представляет случай сильно нелинейного возмущения  $\sigma \gg 1$ , когда ширина  $\Delta$  велика. На первой стадии эволюции такого возмущения дисперсия не играет роли и его поведение определяется нелинейностью. Это значит, что в импульсе должно происходить укручивание переднего фронта и он имеет тенденцию к опрокидыванию. Однако при появлении более высоких гармоник в игру вступает дисперсия, которая должна

«разводить» возмущения с различными длинами волн. Поэтому по прошествии достаточно большого промежутка времени возмущение должно «рассыпаться» — разбиться на отдельные группы, аналогичные волновым пакетам в линейном случае. Каждая из этих групп может приближенно рассматриваться как движущаяся с постоянной скоростью. Но все решения, отвечающие бегущим волнам с постоянной скоростью, мы уже знаем: это периодические волны с  $\sigma < 1$  и солитоны с  $\sigma = 1$ , и никаких других решений нет. Следовательно, начальный импульс с  $\sigma \gg 1$  должен «рассыпаться» на солитоны и слабо нелинейный пакет. Все солитоны движутся со сверхзвуковой скоростью  $c_0 + c$ , притом тем большей, чем больше амплитуда солитона  $u_0$ , а волновой пакет, расплывающийся со временем и уменьшающийся по амплитуде, отстает от точки  $x = c_0 t$  и является дозвуковым.

Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета, которая движется со звуковой скоростью, все солитоны расположены справа от начала координат, а расплывающийся и затухающий со временем практически линейный волновой пакет находится слева. По прошествии достаточно большого промежутка времени практически останутся только солитоны. Отсюда видно, что солитоны являются одним из наиболее существенных типов нелинейных волн.

Вся эта качественная картина в точности совпадает с результатами числовых расчетов, вернее, на результатах этих расчетов она и основана. На рис. 26, например,

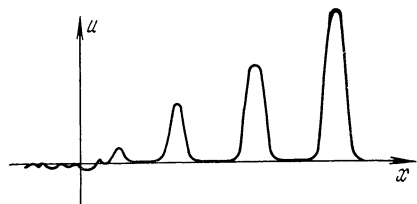


Рис. 26. Солитоны от импульсного возмущения с  $\sigma = 8$

представлены расчеты Березина и Карпмана [77], которые численно решали уравнение Кортевега — де Фриза для начального импульса с  $\sigma = 8$ . Как мы видим, возмущение распалось на четыре солитона и коротковолновый пакет малой амплитуды.

Другим примером процесса рассыпания волны на солитоны может служить эволюция синусоидального

возмущения большой амплитуды. Результаты числового решения этой задачи, полученного Забуским и Крускалом [78], представлены на рис. 27. На этом рисунке изображен только один период по  $x$ , и вся картина должна быть периодически продолжена в обе стороны. Как мы видим, возмущение сначала эволюционирует как простая волна — оно увеличивает свою крутизну и

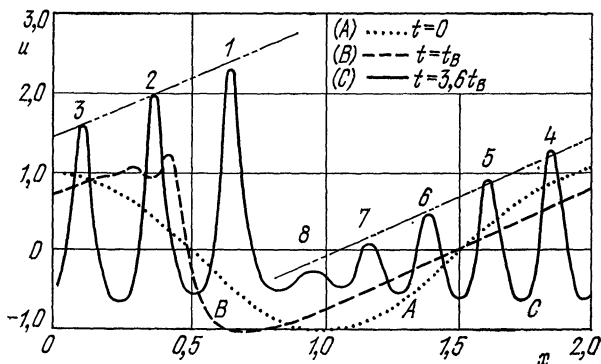


Рис. 27. Эволюция периодического возмущения в слабодиспергирующей среде:  $t=t_B$  — начало опрокидывания волны

приближается к опрокидыванию. Однако перед самым опрокидыванием в игру вступает дисперсия, и от переднего фронта начинает отделяться первый солитон. Затем к фронту опять набегают волна слева, и начинает формироваться второй солитон. Этот процесс продолжается до тех пор, пока вся волна не распадается на совокупность солитонов. Интересно, что в этот момент верхушки солитонов располагаются на одной прямой (кривая C).

Аналогичный эффект имел место и при рассейании отдельного импульса (см. рис. 26). Этот факт имеет простое объяснение. Дело в том, что солитоны образуются примерно в одном и том же месте — на переднем фронте волны. Скорость же каждого солитона, как мы знаем, равна  $u_0/3$ , т. е. пропорциональна его амплитуде. Поэтому расстояние  $\Delta x = ct = u_0 t/3$ , пройденное солитоном за время  $t$  от точки их образования, пропорционально  $u_0$ . Другими словами, амплитуды солитонов  $u_0$  возрастают по линейному закону, пропорционально расстоянию от точки их образования. Заметим, что со временем огибающая солитонов эволюционирует как про-

стая волна, что при плавном изменении амплитуды  $u_0$  видно из условия постоянства амплитуды солитона:

$$\frac{d u_0}{d t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{u_0}{3} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0.$$

Это уравнение для огибающей имеет вид простой волны. Для огибающей рис. 26  $u_0$  выглядит как пилообразная волна с разрывом на фронте, который отвечает солитону с наибольшей амплитудой. Можно сказать, что на огибающей имеется разрыв типа ударной волны без диссипации.

На рис. 27 волна огибающей эволюционирует как простая волна только до тех пор, пока не начинается образование многопоточного состояния: солитоны с большей амплитудой обгоняют более медленные, так что происходит пересечение траекторий солитонов, как показано на рис. 28.

Числовые расчеты выявили очень интересный характер нелинейного взаимодействия солитонов друг с другом. Если солитоны сильно различаются по амплитудам, так что их относительная скорость точно велика, то происходит как бы проход одного солитона сквозь другой, как показано на рис. 28. Однако при пересечении солитонов суперпозиция нет: суммарная амплитуда двух слитонов оказывается несколько меньше суммы амплитуд. При этом в некотором условном смысле можно говорить о двухсолитонном состоянии: возмущение при последующей эволюции распадается только на два солитона, притом в точности совпадает с начальными. После такого распада получаются как прошедшие друг сквозь друга солитоны. При м.

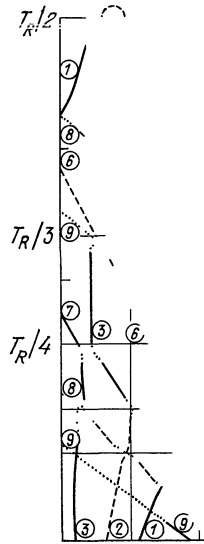


Рис. 28. Траектории;  $T_R$  — время

разнице скоростей солитонов, когда их амплитуды близки, слияния не происходит. При этом солитоны подходят на близкое расстояние и более быстрый солитон через соединяющую их «перемычку», если можно так выразиться, «переливает» часть возмущения в находящийся перед ним более медленный солитон; в результате медленный солитон ускоряется, а быстрый — замедляется. Примером такого «упругого» отталкивания может служить взаимодействие солитонов 2 и 6 на рис. 28 при  $t = T_R/4$ .

Интересно, что в рассматриваемом случае может иметь место слияние большего, чем два, числа солитонов. Например, при  $t = T_R/2$ , как показано на рис. 28, происходит слияние всех четных и отдельно всех нечетных солитонов. А при  $t = T_R$ , соответствующем как бы времени возврата, каждый из солитонов, пройдя целое число периодов, вновь приходит к начальному состоянию, так что все солитоны снова сливаются в один импульс. Возмущение при этом становится близким к начальной синусоиде. Однако поскольку скорости солитонов не соизмеримы, полного совпадения с начальным возмущением нет, и в последующие моменты слияния всех солитонов профиль все больше и больше отходит от начальной синусоиды.

Следует иметь в виду, что солитоны могут образоваться лишь в том случае, если начальное возмущение  $u$  имеет положительную амплитуду (в среде с отрицательной дисперсией). Если начальное возмущение всюду имеет отрицательную амплитуду, то оно не может породить солитоны. В этом случае оно эволюционирует в нелинейный волновой «хвост», который затем расплывается до малой амплитуды и становится линейным.

Все сказанное выше относится и к средам с положительной дисперсией с соответствующей модификацией: в таких средах солитоны отвечают не «горбам», а «впадинам», причем все они движутся со скоростью, меньшей  $c_0$ , а волновой «хвост» малой амплитуды — со скоростью, большей  $c_0$ . В средах с положительной дисперсией солитоны образуются лишь при отрицательной амплитуде возмущения (см. рис. 25, б).

Заметим, что к уравнению Кортевега — де Фриза можно подойти с точки зрения теории классического поля, т. е. получить его из вариационного принципа наименьшего действия. Для этого достаточно ввести в рас-

смотрение лагранжиан поля. Пусть  $\varphi$  — потенциал скорости, определяемый соотношением  $u = \partial\varphi/\partial x$ . Тогда лагранжиан  $L$  записывается в виде

$$L = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^3 - \frac{c_0}{2k_0^2} \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx.$$

Нетрудно проверить, что соответствующее уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta\varphi_t} - \frac{\delta L}{\delta\varphi} = 0,$$

где  $\varphi_t = \partial\varphi/\partial t$ , в точности совпадает с уравнением Кортевега — де Фриза (3.25).

С помощью лагранжиана  $L$ , опираясь на известные теоремы Нётер, можно вывести законы сохранения импульса и энергии. А именно, из инвариантности лагранжиана по отношению к сдвигу системы по координатам следует выражение для импульса

$$P = \frac{1}{2} \int u^2 dx. \quad \S$$

А из инвариантности  $L$  по отношению к сдвигу по времени следует выражение для энергии  $\mathcal{E}_0$  в рассматриваемой нами системе отсчета, движущейся со скоростью  $c_0$ :

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \int \left[ -\frac{u^3}{3} + \frac{c_0}{2k_0^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

Энергия в лабораторной системе отсчета  $\mathcal{E}$  равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + c_0 P.$$

В этом выражении второе слагаемое много больше первого, так что  $\mathcal{E} \approx c_0 P$ .

Кроме  $P$  и  $\mathcal{E}$  уравнение Кортевега — де Фриза имеет бесконечно много интегралов движения, а само уравнение может быть записано в гамильтоновой форме с полностью разделяющимися переменными.

6. *Об аналитическом решении уравнения Кортевега — де Фриза.* При рассмотрении эволюции пучка мы познакомились с нелинейным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

для простых волн. Как мы видим, по форме это действительно нелинейное уравнение. Но по существу оно

описывает просто свободное движение каждой частицы пучка  $du/dt=0$ , т. е. в лагранжевой форме оно выглядит как линейное уравнение и притом простейшего вида. Из него следует, что скорость каждой частицы остается постоянной,  $u = \text{const}$ , а координата линейно изменяется со временем:

$$x = x_0 + u t. \quad (3.36)$$

Следовательно, по любой начальной зависимости  $u(x, t=0) = u_0(x)$ , которую удобно записать в виде обратной функции  $x(u, 0) = x_0(u)$ , легко найти зависимость  $x(u, t)$  для произвольного момента времени:

$$x = x_0(u) + ut. \quad (3.37)$$

Другими словами, для  $x$  как функции  $u, t$  задача является линейной и мгновенно решается, но для обратного восстановления профиля  $u$  по  $x$  для произвольного  $t$  следует решить алгебраическое уравнение (3.37), в общем случае нелинейное.

Уравнение Кортевега — де Фриза, разумеется, гораздо сложнее уравнения для простой волны. Однако нелинейный член в нем имеет тот же вид, и поэтому возникает естественное желание поискать аналогичную возможность решения уравнения в такой форме, чтобы основная часть задачи сводилась к решению линейного уравнения, а связь искомой функции  $u(x, t)$  с найденным линейным решением могла бы быть нелинейной.

Такая возможность в самом деле существует, и она была обнаружена в работе Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [79]. Этими авторами был найден оригинальный и чрезвычайно плодотворный метод аналитического решения уравнения Кортевега — де Фриза, который был затем усовершенствован и распространен на целый класс нелинейных дифференциальных уравнений (см. работу Захарова и Фаддеева [81]).

Так как в основу этого метода положена идея рассмотрения уравнения Кортевега — де Фриза как уравнения для некоторого оператора и используется аналогия с квантовой механикой, то мы напомним сначала некоторые соотношения квантовой механики.

Пусть функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет некоторому уравнению, имеющему вид уравнения Шредингера,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (3.38)$$

где  $H$  — эрмитов оператор, соответствующий гамильтониану рассматриваемой задачи. Как известно, если  $L$  — эрмитов оператор, отвечающий некоторой физической величине, то производная этого оператора по времени определяется соотношением

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + i [H, L], \quad (3.39)$$

где квадратными скобками обозначен коммутатор  $[H, L] = HL - LH$ . Если  $dL/dt = 0$ , то оператор считается не зависящим от времени, т. е. не зависят от времени все его собственные значения  $\lambda$ , определяемые соотношением

$$L\psi = \lambda\psi. \quad (3.40)$$

Оказывается, что уравнение Кортевега — де Фриза можно рассматривать как уравнение постоянства оператора  $dL/dt = 0$  при определенном выборе операторов  $H, L$ . Прямой проверкой можно показать, что при выборе операторов в виде

$$L = \frac{3c_0}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u, \quad (3.41)$$

$$H = -\frac{2c_0 i}{k_0^2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{i}{2} \left( u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u \right) \quad (3.42)$$

условие сохранения оператора  $L$  совпадает с уравнением Кортевега — де Фриза:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + i [H, L] = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0}{2k_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3.43)$$

Это обстоятельство позволяет развить схему аналитического решения уравнения Кортевега — де Фриза. Но, пожалуй, более интересными и важными являются качественные следствия утверждения (3.43).

Вернемся к уравнению (3.40) с оператором (3.41), которое мы запишем в форме

$$-\frac{3c_0}{k_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - u\psi = -\lambda\psi, \quad (3.44)$$



напоминающей обычное одномерное стационарное уравнение Шредингера. По аналогии с этим уравнением первый член в (3.44) можно интерпретировать как кинетическую,  $-u$  — как потенциальную, а  $-\lambda$  — как полную энергию. Если  $u$  достаточно быстро убывает при  $x \rightarrow \pm \infty$ , то положительные собственные значения  $\lambda$  отвечают дискретному спектру связанных состояний, а  $\lambda < 0$  — непрерывному спектру с положительной энергией.

Как мы указывали выше, собственные значения оператора  $L$  сохраняются со временем. Стало быть, при эволюции любого профиля  $u(x)$  в соответствии с уравнением Кортевега — де Фриза (3.43) собственные значения уравнения (3.44) все время будут оставаться неизменными. В частности, они не изменятся и после того, как начальное возмущение разобьется на далеко отстающие друг от друга солитоны, когда собственные значения уравнения (3.44) будут определяться собственными значениями (3.44) для отдельных солитонов, вблизи которых локализована соответствующая собственная функция  $\psi$  для данного  $\lambda$ . Но для отдельного солитона уравнение (3.44) решается точно. Оказывается, что для солитона с амплитудой  $u_0$  имеется только один дискретный уровень с собственным значением  $\lambda = u_0/2$ , а следующий уровень попадает в точку  $\lambda = 0$  (с соответствующей собственной функцией  $\psi = \text{th } x/\Delta$ ) и принадлежит уже непрерывному спектру.

Итак, каждому солитону отвечает только один дискретный уровень. Но так как при эволюции  $u(x)$  со временем собственные значения  $\lambda$  остаются постоянными, то по любому начальному профилю  $u(x, 0)$  можно сразу найти, на какие солитоны он распадается. Для этого достаточно определить все дискретные уровни  $\lambda_n$  для уравнения (3.44). Тогда амплитуды солитонов, на которые разобьется данный импульс, можно найти из простого соотношения  $u_n = 2\lambda_n$ , а число солитонов можно оценить как  $N \sim \sqrt{\sigma}$ . Теперь видно, почему отрицательный импульс в среде с отрицательной дисперсией не может породить ни одного солитона: просто при этом для уравнения (3.41) нет ни одного дискретного положительного уровня. С другой стороны, любой положительный импульс, даже сколь угодно малый, обязательно породит хотя бы один солитон, поскольку в этом

случае, как известно из квантовой механики, уравнение (3.44) имеет хотя бы один дискретный уровень.

Таким образом, для нахождения амплитуд солитонов, которые образуются из данного начального импульса, достаточно найти только собственные значения  $\lambda_n$  линейного уравнения (3.44) с начальным профилем  $u(x, 0)$ .

Оказывается, что и полное решение уравнения Кортевега — де Фриза находится в тесной связи с решением уравнения (3.44). В самом деле, предположим, что мы интересуемся решениями, у которых  $u$  достаточно быстро убывает при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Сюда относится, например, задача об эволюции начального импульса возмущения, которую мы качественно обсуждали выше. Нетрудно видеть, что в этом случае легко определить зависимость от времени асимптотики функций  $\psi$  при  $x \rightarrow \infty$ . Действительно, из уравнения (3.44), полагая  $u \rightarrow 0$ , получаем

$$\begin{aligned}\psi_n &= a_n(t) \exp(-\kappa_n x), \\ \psi_k &= a_k(t) \exp(-i k x) + b_k(t) \exp(i k x).\end{aligned}\quad (3.45)$$

Здесь  $\kappa_n = k_0 \sqrt{\lambda_n/3c_0}$ ,  $k = k_0 \sqrt{-\lambda/3c_0}$ , где  $\lambda_n > 0$  — собственные значения в дискретном спектре, а  $\lambda < 0$  отвечает непрерывному спектру оператора  $L$ .

Если мы теперь обратимся к уравнению (3.38) в области больших  $x$ , где величиной  $u$  в операторе (3.42) можно пренебречь, то легко найдем временную зависимость амплитуд  $a$ ,  $b$ :

$$\begin{aligned}a_n(t) &= a_n(0) \exp\left(\frac{2c_0}{k_0^2} \kappa_n^3 t\right), \\ a_k(t) &= a_k(0) \exp\left(i \frac{2c_0}{k_0^2} k^3 t\right), \\ b_k(t) &= b_k(0) \exp\left(-i \frac{2c_0}{k_0^2} k^3 t\right).\end{aligned}\quad (3.46)$$

Но отношение  $b_k(t)/a_k(t) = S_k(t)$  можно рассматривать как коэффициент отражения для падающей из бесконечности плоской волны на рассеивающий потенциал  $u(x, t)$  в уравнении (3.44). Из общей теории рассеяния известно, что значения  $S_k$  как функции  $k$  для непрерывного спектра и характеристик  $\kappa_n$ ,  $a_n$  дискретного спек-

ра вполне достаточно для «прощупывания» потенциала  $u(x)$  и полного его восстановления.

Таким образом, можно наметить следующую процедуру аналитического решения уравнения Кортевега — де Фриза. По начальному профилю  $u(x, 0)$  находятся дискретный спектр  $\lambda_n$  и начальное значение коэффициента отражения  $S_k(0)$ . Затем по известной зависимости  $a_n$  и  $S_k$  от времени восстанавливается функция  $u(x, t)$  для любого момента времени путем решения обратной задачи теории рассеяния [82, 83]. Тем самым исходная задача полностью решена.

Заметим, что обратная задача теории рассеяния сводится к решению линейного интегрального уравнения, но мы здесь подробно этого рассматривать не будем. Хотелось бы лишь отметить, что при таком аналитическом подходе к решению уравнения Кортевега — де Фриза на каждом этапе достаточно решать лишь линейные уравнения, хотя полученное в результате решение нелинейно зависит от начального профиля и амплитуд, даваемых соотношениями (3.46).

Возможность точного аналитического решения уравнения Кортевега — де Фриза показывает, что оно принадлежит к классу полностью интегрируемых дифференциальных уравнений. В настоящее время найдено достаточно много практически интересных нелинейных уравнений, принадлежащих к этому классу.

*7. Обтекание тел и стационарные солитоны.* Для слабодиспергирующих сред картина черенковского излучения волн движущимся телом, или картина обтекания, оказывается проще, чем при произвольной дисперсии. В самом деле, если в первом приближении дисперсией пренебречь, то волны при обтекании должны излучаться только вдоль линий Маха, идущих под углом  $\theta$ , удовлетворяющим известному черенковскому условию  $\cos \theta = v_{\Phi}/v_0$ . Вдоль линии Маха возмущение является почти одномерным и соответственно должно эволюционировать как одномерный начальный импульс в слабодиспергирующей среде. Мы уже знаем, что оно должно «рассыпаться» на один или более солитонов и дисперсионный «хвостик». Этот «хвостик» довольно быстро затухает из-за дисперсионного расплывания, так что на достаточно большом расстоянии от тела вдоль линии Маха должны остаться только одни солитоны, а картина временной

эволюции возмущения теперь полностью развертывается вдоль линии Маха по мере удаления от обтекаемого тела.

Картину образования солитонов обтекания можно легко наблюдать после дождя на любом мелком ручье. Особенно хорошо для этого подходят широкие мелкие ручьи на асфальтовом покрытии. При первом же взгляде на такой ручей бросается в глаза сетка уединенных волн, перечеркивающих его под некоторым острым углом к направлению потока. Это и есть солитоны. Они образуются обычно вследствие неровностей дна вблизи одного из берегов ручья и пересекают ручей вплоть до другого берега. Иногда нетрудно заметить и то возмущение, например камешек, который послужил источником для данного солитона. Если это возмущение достаточно большое (например, большой камень в ручье), то от него отходят два солитона под несколько различными углами  $\theta$ , как это и должно быть согласно предыдущим рассуждениям.

**8. Ударные волны в слабодиспергирующих средах.** Выше мы предполагали, что диссипативные процессы при распространении волн либо полностью отсутствуют, либо не играют роли по сравнению с дисперсией. В реальных условиях всегда имеется какая-то диссипация, например вязкость, если речь идет о волнах на воде или в плазме. Из-за диссипации все волны будут затухающими. Обсудим, как скажется это затухание на обсуждавшихся выше волнах. Точнее, нас будет интересовать, не приведет ли затухание к возможности распространения других типов волн. Оказывается, что, в самом деле, из-за затухания появляется возможность распространения нового типа волн — ударных.

Учтем прежде всего затухание волн из-за вязкости. Так как в уравнении Кортевега — де Фриза все эффекты малы и учитываются аддитивно, то вязкость может быть учтена просто добавлением нового члена в правую часть этого уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0}{2k_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.47)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Попробуем опять поискать решение типа стационарной бегущей волны  $u(x - ct)$ . После подстановки этой

функции в (3.47) и соответственно замены  $\partial/\partial t$  на  $-c \partial/\partial x$  мы снова можем один раз проинтегрировать это уравнение, после чего получим

$$\frac{c_0}{2k_0^2} \frac{d^2 u}{dx^2} - v \frac{du}{dx} = - \frac{\partial W}{\partial u} = cu - \frac{u^2}{2}. \quad (3.48)$$

Как мы видим, это уравнение можно, как и раньше, интерпретировать как уравнение нелинейного осциллятора, но с затуханием, если координату  $-x$  рассматривать как время  $\tau$ . С помощью этой аналогии нетрудно построить решение на всей оси  $x$ . Оно начинается с находящейся в начале координат «точки» при  $x = +\infty$ , затем эта точка соскальзывает в потенциальную яму  $W(u)$  и совершает в ней затухающие колебания, достигая значения  $u_0 = 2c$  при  $\tau = -x \rightarrow \infty$  (рис. 29, а). В результате образуется несимметричный цуг волн (рис. 29, б).

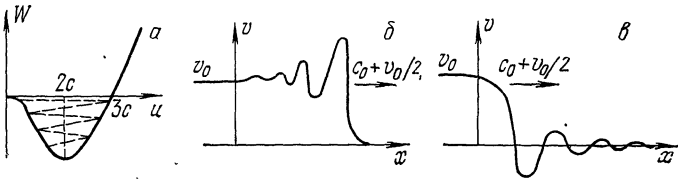


Рис. 29. Потенциальная яма (а) и ударные волны в средах с отрицательной (б) и положительной (в) дисперсиями

Видно, что после прохождения такого цуга состояние среды меняется: за ним вещество движется со скоростью  $u_0 = 2c$ . Таким образом, мы получаем скачок — ударную волну, но с осциллирующей структурой.

Если вязкость мала, то число осцилляций в волне велико. По мере увеличения  $v$  эти осцилляции затухают быстрее; наконец, при достаточно большом  $v$  процесс становится аperiодическим и мы получаем обычную ударную волну без осцилляций с монотонным возрастанием  $u$  от нуля до  $u_0$ .

Картина, изображенная на рис. 29, б, относится к среде с отрицательной дисперсией, когда самый большой солитон бежит впереди, а осциллирующий «хвост» остается позади фронта. В средах с положительной дисперсией, наоборот, осциллирующая структура находится перед фронтом волны, как это показано на рис. 29, в.

На рис. 30 представлены экспериментальные данные, иллюстрирующие обе эти возможности. На рис. 30, *a* приведена структура электромагнитной ударной волны в коаксиально-спиральной нелинейной линии передачи [84]. Нелинейным элементом этой линии является феррит, а дисперсия длинноволновых возмущений возникает

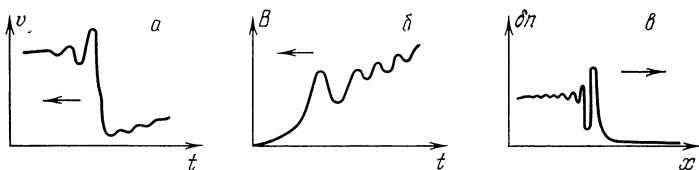


Рис. 30. *a* — Электромагнитная волна в коаксиально-спиральной линии с ферритом; *б* — бесстолкновительная ударная волна; *в* — электростатическая волна в плазме

из-за ограниченности линии в поперечном направлении. В результате образуется нелинейная диспергирующая среда. Волны в таких средах описываются уравнением Кортевега — де Фриза с диссипацией типа (3.47). На рис. 30, *б* приведен пример, более близкий к физике плазмы. Здесь представлен профиль бесстолкновительной ударной волны в плазме [85]. Как мы видим, диссипация в такой волне не настолько велика, чтобы не позволить проявиться осциллирующей структуре. На рис. 30, *в* представлен профиль электростатической ударной волны, соответствующей ионно-звуковому возмущению [86а].

9. *Опрокидывание волн.* Вспомним, что мы начали рассмотрение нелинейных волн с пучка невзаимодействующих частиц и увидели, что в нем имеет место опрокидывание и образование многопоточковых состояний. В частности, именно таким пучком являются ионы в неизотермической плазме ( $T_i \ll T_e$ ), если в начальном возмущении скорости ионов настолько велики, что влиянием электронов на их движение можно пренебречь. Очевидно, для этого скорость ионов должна быть значительно больше звуковой, т. е. число Маха  $M = v/c_s \gg 1$ .

Но, с другой стороны, в рамках слабой дисперсии и применимости уравнения Кортевега — де Фриза мы ни-

когда не сможем встретить явление типа опрокидывания: как мы видели выше, возмущение любой амплитуды в конце концов «рассыпáлось» на какое-то количество солитонов. Возникает вопрос, как происходит переход от одного предельного случая к другому и почему реальная дисперсия не может помешать образованию «барашков» на волнах в мелкой воде или многопоточных течений в плазме, т. е. не может предотвратить опрокидывания?

Мы рассмотрим здесь в качестве примера ионный звук в неизотермической плазме ( $T_i \ll T_e$ ) в отсутствие магнитного поля. Если учесть, что электроны в волне успевают приобрести распределение Больцмана, то уравнения движения для одномерной волны примут вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -c_s^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n'v) = 0, \quad (3.50)$$

$$d^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = e^\psi - n'. \quad (3.51)$$

Здесь  $v$  — скорость ионов,  $n' = n_i/n_0$  — их плотность, отнесенная к невозмущенной плотности  $n_0$ ,  $\psi = e\varphi/T_e$ ,  $c_s^2 = T_e/m_i$ ,  $d^2 = T_e/4\pi e^2 n_0$ ,  $e^\psi$  — плотность электронов, отнесенная к  $n_0$ .

Для периодической установившейся волны в системе отсчета, где волна покоится, в уравнениях (3.49), (3.50) следует опустить производную по времени, и тогда получим:

$$v^2 - 2c_s^2 \psi = v_\phi^2 = \text{const}, \quad n'v = v_\phi = \text{const}.$$

Величина  $v_\phi$ , как видно из последнего соотношения, имеет смысл фазовой скорости волны; в первом соотношении мы выбрали  $\text{const} = v_\phi^2$ , придав тем самым определенное значение произвольной константе в потенциале  $\psi$ . Подставляя найденные выражения для  $n'$ ,  $v$  в (3.51), получим одно нелинейное уравнение второго порядка для  $\psi$ :

$$d^2 \frac{d^2 \psi}{d x^2} = e^\psi - \frac{v_\phi}{(v_\phi^2 - 2c_s^2 \psi)^{1/2}} = - \frac{dW}{d\psi}, \quad (3.52)$$

где

$$W = -e^{\psi} - \frac{v_{\Phi}}{c_s^2} (v_{\Phi}^2 - 2c_s^2 \psi)^{1/2} \quad (3.53)$$

снова имеет смысл потенциальной энергии осциллятора, если  $x$  интерпретировать как время.

Из соотношений (3.52), (3.53) видно, что  $\psi$  не может принимать значений, бóльших  $v_{\Phi}^2/2c_s^2$ : при  $\psi = v_{\Phi}^2/2c_s^2$  ионы останавливаются в системе отсчета, движущейся вместе с волной, а затем, при бóльших  $\psi$ , они должны были бы отражаться от гребня волны и односкоростное течение перестало бы существовать. С помощью (3.52) можно показать [4], что этому предельному случаю соответствует число Маха  $M_* = v_{\Phi}/c_s = 1,6$ . Другими словами, при  $M > 1,6$  односкоростных ионно-звуковых волн не существует.

Аналогичная картина имеет место и для других типов волн в плазме. Например, при поперечном распространении магнитозвуковой волны в холодной плазме даже при наличии конечной проводимости должно наступать опрокидывание при  $M_* = v_{\Phi}/c_A = 3$ , а при идеальной проводимости критическое число Маха равно  $M_* = 2$  [72].

Заметим, что при малых  $\psi$  в уравнении (3.52) можно было бы произвести разложение функции  $dW/d\psi$  в ряд по  $\psi$ , и при учете только первых двух членов оно свелось бы к уравнению Кортевега — де Фриза. Таким образом, с формально математической точки зрения отклонение от приближения слабой дисперсии начинается, когда аналитическая зависимость  $dW/d\psi$  от  $\psi$  начинает отличаться от квадратичной, т. е. в уравнениях движения начинает проявляться нелинейность, которая зависит от абсолютной амплитуды волны или числа Маха  $M$ . Эта нелинейность более сильная, она уже не останавливается дисперсией и приводит к опрокидыванию волны. Для ионного звука такая опрокидывающаяся волна должна приводить к образованию многопоточковых течений, а при  $v/c_s \gg 1$  мы приходим к предельному случаю пучка не взаимодействующих ионов.

10. *Электрические домены.* Уравнения (3.52), (3.53), как и уравнение Кортевега — де Фриза, допускают решения типа солитонов. Форма этих ионно-звуковых солитонов не является столь универсальной, как солитонов при слабой дисперсии. Но, с другой стороны, они



примечательны тем, что, представляя собой новый вид солитонов, демонстрируют общий характер этого явления для широкого класса нелинейных уравнений. В самом деле, с решениями типа уединенных волн нам предстоит еще не один раз встретиться в последующих главах.

Здесь нам хотелось бы привести еще один интересный пример солитонов. Эти солитоны (они получили название электрических доменов) образуются при определенных условиях при прохождении тока через полупроводник. Хотя соответствующее явление относится к физике полупроводников, по своей физической природе оно очень близко к тому, что происходит иногда в плазме.

В 1963 г. Ганн обнаружил чрезвычайно интересный эффект: при наложении на образец арсенида галлия  $n$ -типа электрического поля напряженностью около 3 кВ/см в нем появлялись когерентные колебания тока

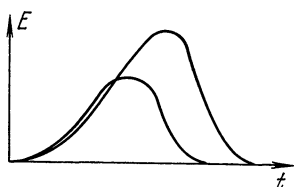


Рис. 31. Профили электрического поля для стационарных свободно распространяющихся доменов в арсениде галлия. Домены бегут влево со скоростью  $1,2 \cdot 10^7$  см/с

с большой амплитудой [87]. Частота колебаний около  $10^9$  Гц изменялась обратно пропорционально длине образца. Позднее Ганн экспериментально установил [88], что эти колебания связаны с прохождением от катода к аноду областей с сильным электрическим полем: каждому периоду колебаний тока в цепи соответствовало зарождение на катоде и прохождение через образец одной такой области. Области с сильным электрическим полем были названы электрическими доменами. Форма такого домена представлена на рис. 31, где две кривые соответствуют несколько различным напряжениям на образце. Как видно из рисунка, домены несколько несимметричны — их передний фронт более пологий, чем задний. При уменьшении амплитуды доменов, т. е. разности потенциалов  $V_d$  на домене, они становятся симметричными.

Возникновение электрических доменов в полупроводниках было объяснено на основе представлений об

отрицательной дифференциальной проводимости. Допустим, что образец имеет вольтамперную характеристику с падающим участком ( $E_{c1}, E_{c2}$ ), на котором дифференциальная проводимость  $\sigma_d = dj/dE$  отрицательна (рис. 32). При заданном токе во внешней цепи, скажем  $j_0$ , в образце может установиться одно из трех значений поля —  $E_1, E_2, E_3$ . Одно из этих значений,  $E_2$ , оказывается неустойчивым. В самом деле, допустим, что  $E = E_2$ , и предположим, что внутри образца появилась небольшая флуктуация плотности электронов  $n'$ . В результате флуктуации данный объем приобретает отрицательный потенциал. Но в силу того, что  $\sigma_d < 0$ , электроны будут не отталкиваться, а притягиваться к области отрицательного потенциала, и флуктуация будет нарастать. Из-за неустойчивости в образце должны самопроизвольно образоваться области пространственного заряда. Поскольку отрицательная дифференциальная проводимость создается только вдоль направления внешнего поля, то эти области должны иметь вид плоских слоев, перпендикулярных оси  $x$ , вдоль которой идет ток. Математически эту неустойчивость, в предположении, что все величины зависят только от  $x$ , можно описать с помощью уравнений

$$j = en\mu(E)E + eD \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (3.54)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e(n - n_0), \quad (3.55)$$

$$j + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} = j_0 = \text{const}, \quad (3.56)$$

где  $\mu(E)$  — подвижность электронов,  $D$  — их коэффициент диффузии,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $n_0$  — плотность доноров,  $j_0$  — внешний ток. В уравнении (3.56) мы сохранили ток смещения, так что оно заменяет нам уравнение непрерывности. В линейном приближении для возмущений вида  $\exp(-i\omega t + ikx)$  из (3.54)–(3.56) получаем выражение для частоты

$$\omega = ku - i \frac{4\pi\sigma_d}{\varepsilon} - iDk^2, \quad (3.57)$$

где  $u = -\mu(E_0)/E_0$  — дрейфовая скорость электронов,

$\sigma_d = en_0 d(\mu E) / dE$  — дифференциальная проводимость. Как видно из (3.57), при  $\sigma_d < 0$  линейные возмущения с достаточно малыми  $k$  нарастают во времени.

При увеличении амплитуды колебаний в игру вступают нелинейные эффекты — мы попадаем в области  $E < E_{c1}$  и  $E > E_{c2}$  (см. рис. 32), где  $\sigma_d > 0$  и колебания должны стабилизироваться. Установившиеся колебания

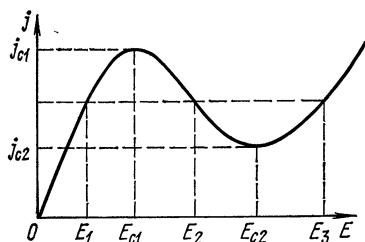


Рис. 32. Вольтамперная характеристика полупроводника с отрицательной дифференциальной проводимостью

можно рассматривать с помощью тех же уравнений (3.54) — (3.56), если считать, что возмущение имеет вид бегущей волны  $E(x - v_\phi t)$ . Исключая из этих уравнений  $n$  и  $j$ , получим одно нелинейное уравнение второго порядка для  $E$ :

$$D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + [\mu(E) E + v_\phi] \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4 \pi e n_0}{\varepsilon} \mu(E) - E - j_0 = - \frac{\partial W}{\partial E}. \quad (3.58)$$

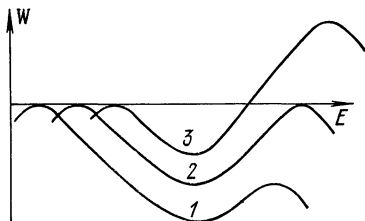
Как и при исследовании нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза, мы можем рассматривать (3.58) как уравнение для нелинейного осциллятора с силой трения, которая описывается членом с первой производной в левой части. Чтобы работа силы трения в среднем обращалась в нуль,  $v_\phi$ , очевидно, должна иметь порядок дрейфовой скорости электронов.

Эквивалентный потенциал  $W(E)$  в правой части уравнения (3.58) несколько изменяется в зависимости от величины  $j_0$ , как показано на рис. 33. При некотором значении  $j_0 = j_b$  потенциал дважды касается нуля. В этом случае можно построить решение типа широкого солитона: вначале поле  $E$  находится при значении  $E_1$ , затем оно переходит к  $E_3$  и после длительного пребывания в точке  $E_3$  быстро возвращается к прежнему значению.

нию. При  $j_0 > j_b$  можно построить домен (солитон) сильного поля, а при  $j_0 < j_b$  — солитон слабого поля. Кроме того, существуют разного рода периодические решения и решения типа ударных волн с диссипацией, но реальному домену Ганна соответствует простой солитон сильного поля.

К настоящему времени электрические домены обнаружены во многих полупроводниках. Оказалось, что

Рис. 33. Потенциал  $W(E)$  для домена: 1 —  $j_0 < j_b$ , 2 —  $j_0 = j_b$ , 3 —  $j_0 > j_b$



существует много механизмов отрицательной дифференциальной проводимости. Например, в арсениде галлия, в котором Ганн впервые обнаружил домены, условие  $\sigma_d < 0$  связано с разогревом электронов и переходом их в долину поверхности Ферми с меньшей эффективной массой. Более подробно с другими механизмами можно познакомиться по обзору [91].

### § 3. Самофокусировка и самосжатие волновых пакетов

1. *Самофокусировка.* Выше мы довольно подробно познакомились с нелинейными волнами в диспергирующих средах, но при этом все время ограничивались одномерным случаем, когда все величины зависели только от одной координаты  $x$  и времени  $t$ . Чтобы получить более полное представление о динамике нелинейной упругой среды, следует отказаться от ограничения одномерностью и перейти к общему случаю трехмерных или, по крайней мере, двумерных волн. Но прежде чем переходить к достаточно сложному общему случаю, естественно начать с более простого класса задач, когда волны слабо отличаются от плоских, т. е. когда мы имеем дело с волной, амплитуда и фаза которой медленно меняются в пространстве и во времени.

При этом мы встречаемся с двумя чрезвычайно интересными нелинейными явлениями — самофокусировкой и самосжатием волновых пакетов. Рассмотрим сначала самофокусировку.

Явление самофокусировки было предсказано Г. Аскарьяном [92] исходя из весьма простых соображений. Допустим, что в оптически прозрачной среде распространяется мощный луч лазера. Вследствие ряда эффектов (нелинейной поляризуемости, электрострикции, разогрева и т. д.) такой луч немного изменяет показатель преломления среды. Если это изменение положительно, т. е. среда становится оптически более плотной, то луч создает сам себе нечто вроде линзы, которая будет его фокусировать. Другими словами, центральная часть волнового фронта несколько отстает от периферических, и волна становится сходящейся (рис. 34).

Рассмотрим это явление подробнее. Пусть  $k_0$  — волновое число волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ ,

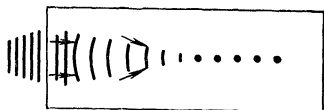


Рис. 34. Самофокусировка

$k_y$  — малая поперечная добавка к волновому вектору, возникающая из-за того, что фронт волны на рис. 34 несколько поворачивается из-за неоднородности показателя преломления  $N$ . В первом приближении добавка  $\delta N$  к показателю преломления  $N$  пропорциональна интенсивности волны, т. е. квадрату ее амплитуды:  $\delta N = qa^2N$ .

Величину  $k_y$ , определяющую наклон луча по отношению к оси  $x$ , можно найти с помощью уравнения (2.141) для волнового вектора, т. е.  $\partial k / \partial t = -\nabla \omega$ . Здесь  $\omega = kv_\phi(1 - \delta N/N) = kv_\phi - qkv_\phi a^2$ . Нам достаточно использовать лишь  $y$ -компоненту уравнения движения для  $k$ , при этом нужно учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial y} (kv_\phi) = v_g \frac{\partial k_x}{\partial y},$$

где  $v_g$  — групповая скорость. Но так как векторное по-

ле  $k$  является безвихревым, то  $\partial k_x/\partial y = \partial k_y/\partial x$ , поэтому  $y$ -компоненту уравнения (2.141) с нелинейной добавкой к частоте можно записать в виде

$$\frac{\partial k_y}{\partial t} + v_r \frac{\partial k_y}{\partial x} = k_0 v_\Phi q \frac{\partial a^2}{\partial y}. \quad (3.59)$$

Величину  $a^2$  можно определить с помощью уравнения переноса энергии (2.155) волнового пакета, которое с учетом пропорциональности  $\mathcal{E}$  и  $a^2$  можно записать в виде

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + v_r \frac{\partial a^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_y}{k_0} v_r a^2 \right) = 0. \quad (3.60)$$

Мы учли здесь, что у групповой скорости имеется малая составляющая вдоль оси  $y$ , равная  $(k_y/k_0)v_r$ , где  $v_r$  — невозмущенное значение групповой скорости.

В стационарном случае в уравнениях (3.59), (3.60) можно опустить производные по времени, так что они будут описывать процесс самофокусировки вдоль луча. Дифференцируя соотношение (3.60) по  $x$  и исключая затем производную  $\partial k_y/\partial x$  в последнем слагаемом (остальные множители мы приближенно считаем постоянными) с помощью соотношения (3.59), мы получим одно уравнение для квадрата амплитуды:

$$\frac{\partial^2 a^2}{\partial x^2} = -q \frac{v_\Phi}{v_r} \frac{\partial^2 a^2}{\partial y^2}.$$

Отсюда видно, что вдоль луча интенсивность волны удовлетворяет уравнению струны, но с отрицательным квадратом скорости звука при  $q > 0$ , когда в области распространения светового пучка показатель преломления возрастает. В результате и возникает самофокусировка.

Эти рассуждения, совершенно прозрачные физически, могут показаться все же недостаточно обоснованными, если учесть, что самофокусировка представляет собой нелинейный и притом довольно медленный процесс, и возникает вопрос, не проявляются ли раньше более сильные эффекты нелинейного опрокидывания волн (на языке оптики — умножение частоты). Но, как показывает рассмотрение § 2, дисперсия легко предотвращает опрокидывание волн. Поэтому при наличии

даже небольшой дисперсии может и не происходить сильного насыщения высокими гармониками, если амплитуда волны не очень велика. Впрочем, даже при достаточно большой амплитуде качественные соображения о самофокусировке сохраняют силу, если устанавливается определенная почти периодическая волна по  $x$  и имеет место равновесие гармоник при соревновании между дисперсией и нелинейным опрокидыванием. В частности, эффекты самофокусировки проявляются даже в предельном случае одного-единственного солитона [95].

2. *Колебания и самофокусировка солитонов.* Рассмотрим солитон, бегущий вдоль  $x$  на плоскости  $(x, y)$ , так что сверху он будет выглядеть, как показано на рис. 35. Если амплитуда  $u_0$  и фаза  $x_0$  (т. е. координата максимума скорости) не зависели бы от  $y$ , то это был бы обычный одномерный солитон, например бегущий по поверхности мелкого водоема.

Допустим теперь, что его амплитуда меняется в зависимости от  $y$  (на рис. 35,а заштрихованы области с повышенной амплитудой). В среде с отрицательной дисперсией участки с большей амплитудой движутся быстрее и солитон искривляется, как показано на рис. 35,б. Это искривление легко найти, если вспомнить, что скорость солитона равна  $c_0 + c = c_0 + u_0/3$ , так что

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = c_0 + \frac{u_0}{3}.$$

Следовательно, если у солитона есть малая модуляция амплитуды  $\delta u_0(y)$ , то он будет искривляться со временем, так что его наклон  $\partial x_0 / \partial y$  будет меняться:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta u_0}{3}. \quad (3.61)$$

Но вследствие искривления возникает эффект фокусировки, и амплитуда центральной части изображенного на рис. 35,б участка солитона начинает возрастать. Вследствие этого через некоторое время центральная часть догонит периферийные области и форма солитона восстановится, но со сместившимися по оси  $y$  областями повышенной амплитуды (рис. 35,в). Отсюда видно, что солитон в среде с отрицательной дисперсией

не испытывает самофокусировки — он колеблется, как натянутая струна.

Если амплитуда солитона модулирована слабо, т. е.  $\delta u_0 \ll u_0$ , то эти колебания можно рассмотреть в линейном приближении. Будем считать, что искривление соли-

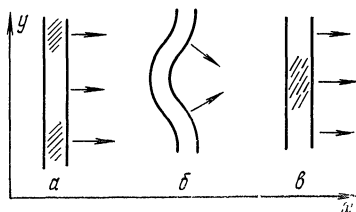


Рис. 35. Колебания солитона в среде с отрицательной дисперсией

тона слабое,  $\delta x_0 / \delta y \ll 1$ . Тогда  $y$ -компонента скорости его отдельного участка может быть записана как

$$\delta u_y = - \frac{\partial x_0}{\partial y} c_0;$$

но из-за движения вдоль оси  $y$  будет меняться энергия солитона  $\mathcal{E} \sim u_0^2 \Delta \sim u_0^{3/2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_0^{3/2} &\approx \frac{3}{2} u_0^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} \delta u_0 = \\ &= - \frac{\partial}{\partial y} \delta u_y u_0^{3/2} \approx c_0 u_0^{3/2} \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Здесь в правой части мы положили  $u_0^{3/2} \approx \text{const}$ . Дифференцируя соотношение (3.62) по времени и исключая  $x_0$  с помощью (3.61), получим уравнение малых колебаний

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u_0 = \frac{2c_0 u_0}{9} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta u_0.$$

Отсюда видно, что для среды с отрицательной дисперсией, когда амплитуда солитона положительна ( $u_0 > 0$ ), мы получаем уравнение гиперболического типа, описывающее колебания струны.

Напротив, при положительной дисперсии ситуация изменяется: амплитуда солитона отрицательна, и уравнение для  $\delta u_0$  приводит к нарастанию малых колебаний. Это ясно и из физических соображений. Участки с повышенной амплитудой несколько отстают, и к ним



из-за искривления устремляются новые порции возмущения. В результате возмущение нарастает и солитон разбивается на отдельные сгустки вдоль оси  $y$ .

Нетрудно вывести двумерное нелинейное уравнение, описывающее нелинейную стадию развития колебаний солитонов [95]. Это уравнение является обобщением уравнения Кортевега — де Фриза на двумерные среды. Удобно опять стартовать с линейного дисперсионного соотношения

$$\omega = c_0 k - \frac{c_0 k^3}{2k_0^2}.$$

При наличии зависимости от переменной  $y$  значение волнового вектора  $\mathbf{k}$  следует считать равным  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . Мы ограничимся возмущениями, медленно изменяющимися вдоль оси  $y$ , т. е. будем считать  $k_y \ll k_x$  и положим

$$k \approx k_x + \frac{1}{2} \frac{k_y^2}{k_x}$$

в первом слагаемом для  $\omega$ . Тогда дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$\omega k_x - c_0 k_x^2 + \frac{1}{2} c_0 k_y^2 - \frac{c_0 k_x^3}{2k_0^2} k_x = 0. \quad (3.63)$$

Переходя в систему отсчета, движущуюся вдоль оси  $x$  со скоростью  $c_0$ , можно устранить второе слагаемое в (3.63). По аналогии с (3.24) уравнение (3.63) можно записать в переменных  $x, t$ , а затем добавить нелинейный член, как это было сделано при переходе от (3.24) к (3.25). В результате получим двумерное уравнение для слабо нелинейной, слабодиспергирующей среды с отрицательной дисперсией:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0}{2k_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2} c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.64)$$

Это уравнение получило название уравнения Кадомцева — Петвиашвили. Для среды с положительной дисперсией знак в правой части этого уравнения должен быть изменен на противоположный. Оказывается, что для сред с положительной дисперсией уравнение

(3.64) имеет локализованные как по  $x$ , так и по  $y$  решения, которые представляют собой двумерные солитоны. Более того, двумерное уравнение (3.64) является полностью интегрируемым, так что оно, как и уравнение Кортевега — де Фриза, сохраняет число солитонов при их нелинейном взаимодействии друг с другом.

3. *Самосжатие волнового пакета (модуляционная неустойчивость)*. Сжатие нелинейной волны может происходить не только в поперечном, но и в продольном направлении по отношению к направлению распространения волны. Чтобы описать этот эффект, рассмотрим плоский волновой пакет с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Будем считать, что амплитуда волны невелика, так что волна не сильно отличается от синусоидальной, т. е. высшие гармоники, находящиеся в равновесии с основной, малы. Тогда волну можно характеризовать волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$  основной гармоники. Для такой волны основным усредненным нелинейным эффектом является зависимость фазовой скорости или частоты от амплитуды  $a$ , так что при малой амплитуде, когда можно ограничиться лишь первой исчезающей поправкой,

$$\omega = \omega_k + \alpha a^2, \quad (3.65)$$

где  $\omega_k$  отвечает частоте линейной волны, а второе слагаемое — нелинейной поправке. Если  $k$  и  $a$  изменяются с изменением  $x$ , т. е.  $\omega = \omega(x)$ , то, как мы знаем, волновое число  $k = -\partial\varphi/\partial x$  будет изменяться со временем:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v_g \frac{\partial k}{\partial x} - \alpha \frac{\partial a^2}{\partial x}, \quad (3.66)$$

где мы учли амплитудную добавку в выражении для частоты (3.65) и обозначили через  $v_g$  групповую скорость:  $v_g = \partial\omega_k/\partial k$ . Далее, в волновом пакете энергия, т. е. квадратичная по амплитуде величина, переносится с групповой скоростью. Тогда в качестве закона сохранения энергии можно принять уже знакомое нам уравнение

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_g a^2) = 0. \quad (3.67)$$

Из уравнений (3.66), (3.67) следует, что при определенных условиях плоская волна оказывается неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты. В самом деле, допустим, что на монохромати-

ческую волну с волновым числом  $k_0$  и амплитудой  $a_0$  наложено малое возмущение

$$k = k_0 + k' \exp(-i\nu t + i\kappa x),$$

$$a = a_0 + a' \exp(-i\nu t + i\kappa x),$$

где  $\nu \ll \omega$ ,  $\kappa \ll k_0$  — частота и волновое число модуляции. Тогда в линейном приближении из (3.66), (3.67) получим дисперсионное соотношение

$$\nu = v_r \kappa \pm \sqrt{\alpha a_0^2 v_r'} \kappa, \quad (3.68)$$

где  $v_r' = \partial v_r / \partial k$ . Как мы видим, при  $\alpha v_r' < 0$  имеет место неустойчивость типа разбиения волны на пакеты и сжатия волновых пакетов. Этот результат был получен впервые Лайтхиллом [93].

Физика этой неустойчивости поясняется на рис. 36. Допустим, что  $\alpha > 0$ . Тогда в точках  $A$ ,  $A'$  фазовая скорость волны больше, чем в точке  $B$ , и на участке  $P$  волновое число, пропорциональное числу узлов на единице

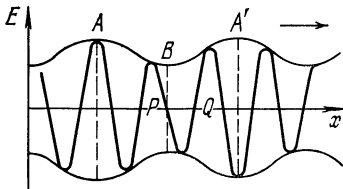


Рис. 36. Самосжатие волнового пакета (модуляционная неустойчивость)

длины, будет возрастать, а на участке  $Q$  — убывать со временем. Вследствие этого при  $v_r' < 0$  волновой пакет в области  $P$  будет отставать и усиливать волну в точке  $A$ , а в области  $Q$  он будет забегать вперед и усиливать волну в точке  $A'$ .

Условию  $\alpha v_r' < 0$  удовлетворяют, в частности, гравитационные волны на глубокой воде: у таких волн, как оказывается, нелинейная поправка к фазовой скорости (а следовательно, и к частоте) положительна, а производная  $v_r' = -(1/4) \sqrt{g/k^3}$  отрицательна. В свое время вывод о неустойчивости периодических гравитационных волн на воде произвел сенсацию в гидродинамике и казался неправдоподобным. Но затем он был получен заново различными методами и подтвержден экспериментально [94]. Теперь уже никто не сомневается в неустойчивости гравитационных волн на глубокой воде, и, ста-

ло быть, поверье о «девятом вале» имеет под собой определенные физические основания.

4. *Параболическое уравнение.* Как самофокусировка, так и самосжатие волновых пакетов, и притом с учетом дифракции, могут быть описаны с помощью параболического уравнения (2.168). С учетом нелинейной добавки к частоте это уравнение имеет вид

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + i v_r \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{v_r}{2k_0} \Delta_{\perp} E + \frac{1}{2} v_r' \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \alpha |E|^2 E = 0, \quad (3.69)$$

где  $v_r' = \partial v_r / \partial k$ .

Рассмотрим снова задачу о неустойчивости плоской волны  $E_0 = a_0 \exp(-i\nu_0 t)$ , где  $a_0$  — начальная амплитуда, а  $\nu_0$  — частота, которая согласно (3.69) равна  $\nu_0 = \alpha a_0^2$ . Предположим, что волна  $E_0$  несколько возмущается, так что ее амплитуда  $a$  и фаза  $\varphi$  слабо изменяются в пространстве и со временем:

$$E = (a_0 + a') \exp(-i\nu_0 t + i\varphi').$$

Малые величины  $a'$  и  $\varphi'$  следует считать действительными. После подстановки этого выражения в (3.69) и отбрасывании квадратичных по  $a'$ ,  $\varphi'$  членов мы получим систему уравнений для  $a'$ ,  $\varphi'$

$$\frac{\partial a'}{\partial t} + v_r \frac{\partial a'}{\partial x} - a_0 L \varphi' = 0, \quad (3.70)$$

$$a_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + a_0 v_r \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + L a' + 2\alpha a_0^2 a' = 0, \quad (3.71)$$

где  $L$  — оператор, равный

$$L = -\frac{v_r}{2k_0} \Delta_{\perp} - \frac{1}{2} v_r' \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Уравнения (3.70), (3.71) являются линейными, и их решение можно искать в виде  $\exp(-i\nu t + i\kappa x)$ . При этом  $L$  можно считать равным числу

$$L = \frac{v_r}{2k_0} \kappa_{\perp}^2 + \frac{1}{2} v_r' \kappa_x^2,$$

и как условие разрешимости (3.70), (3.71) находим следующее выражение для частоты:

$$\nu = v_r \kappa_x \pm \sqrt{L(2\alpha a_0^2 + L)}. \quad (3.72)$$

Если  $\kappa_{\perp} = 0$  и  $\kappa_x$  мало, то получаем отсюда прежний результат (3.68), т. е. неустойчивость по отношению к самосжатию при  $\alpha v'_r < 0$ . Как видно из (3.72), вывод о самосжатии при  $\alpha v'_r < 0$  справедлив только при достаточно малых  $\kappa_x$ . Если  $\kappa_x^2 > -4\alpha a_0^2/v'_r$ , то неустойчивость по отношению к самосжатию стабилизируется дифракционным расплыванием волнового пакета. В другом предельном случае  $\kappa_x = 0$  из (3.72) следует самофокусировка, если  $\alpha < 0$ . Самофокусировка также начинается только с достаточно малых  $\kappa_{\perp}$ , а именно  $\kappa_{\perp}^2 < 4|\alpha|a_0^2 k_0/v_r$ . Поскольку минимально возможное  $\kappa_{\perp}$  имеет порядок обратного радиуса цилиндрического луча  $1/R$ , то отсюда следует, что в рассматриваемом приближении, когда учтена только квадратичная по амплитуде поправка к частоте (3.65), самофокусировка начинается лишь при достаточно большой мощности лазерного пучка, пропорциональной  $a_0^2 R^2$ .

Стабилизирующая роль дифракции приводит к возможности существования стационарных сфокусированных пучков или самосжатых волновых пакетов [96, 97]. В самом деле, рассмотрим, например, случай  $\alpha v'_r < 0$  и допустим, что зависимость от  $y$  и  $z$  отсутствует. Рассмотрим решение типа бегущего пакета

$$E = \exp(-i\nu_0 t) u(x - v_r t).$$

Для функции  $u$  из (3.69) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2\alpha}{v'_r} u^3 - \frac{2\nu_0}{v'_r} u. \quad (3.73)$$

Но с уравнением такого типа мы уже встречались при рассмотрении периодических решений уравнения Кортевега — де Фриза. Мы опять можем рассматривать (3.73) как уравнение для нелинейного осциллятора с потенциальной энергией

$$W = -\frac{\alpha}{2v'_r} u^4 + \frac{\nu_0}{v'_r} u^2.$$

При  $\alpha v'_r < 0$  и  $\nu_0 v'_r < 0$  потенциал  $W$  имеет вид ямы, так что возможны как периодические волны огибающей, так и локализованные пакеты типа солитонов. Аналогичным образом для случая самофокусировки можно

найти локализованные в поперечном направлении решения, если  $\alpha < 0$ . Эти решения соответствуют пучкам, которые сами себе создают волновод и распространяются в виде узких нитей. Впрочем, эти решения неустойчивы [112].

Эффекты самофокусировки и самосжатия волновых пакетов должны проявляться и на магнитогидродинамических волнах, но экспериментально они пока не исследованы.

5. *Ленгмюровские солитоны.* В плазме эффект самосжатия волнового пакета может проявляться на ленгмюровских волнах [99]. Дело в том, что локализованный в пространстве ленгмюровский пакет волн оказывает расталкивающее действие на плазму, так как высокочастотные колебания выталкивают электроны из области, занятой волновым пакетом. В результате плотность плазмы в области локализации волнового пакета несколько понижается, и у собственной ленгмюровской частоты появляется отрицательная добавка [коэффициент  $\alpha$  в формуле (3.65) отрицателен].

Так как частота ленгмюровских колебаний равна

$$\omega = \omega_{pe} + \frac{3\Gamma}{2m_e \omega_{pe}} k^2$$

и, следовательно,  $v'_r > 0$ , то для ленгмюровских волн критерий Лайтхилла указывает на возможность модуляционной неустойчивости.

Рассмотрим это явление более подробно. Пусть  $\delta n$  — возмущение плотности электронов, так что

$$\omega_{pe} = \omega_{p0} + \frac{1}{2} \omega_{p0} \frac{\delta n}{n} + \frac{3\Gamma}{2m_e \omega_{p0}} k^2, \quad (3.74)$$

где  $\omega_{p0} = \sqrt{4\pi e^2 n/m_e}$  — невозмущенная ленгмюровская частота.

Чтобы найти  $\delta n$ , нужно знать выражение для так называемой силы Миллера, т.е. силы, действующей на электрон в неоднородном высокочастотном поле. Эта сила легко получается из уравнения движения электрона

$$m_e \ddot{x} = -e\mathcal{E} = -e E_0(x) \cos \omega t, \quad (3.75)$$

если представить координату  $x$  в виде суммы медленно меняющейся  $x_0$  и быстрой  $\tilde{x}$  частей. Тогда для быстро осциллирующей величины получаем из (3.75)  $\tilde{x} = eE/m_e\omega^2$ ,

а для медленной составляющей  $x_0$  уравнение получается усреднением (3.75) по времени в предположении малости  $\tilde{x}$ :

$$m_e \ddot{x}_0 = - \left\langle e \frac{\partial E}{\partial x} \tilde{x} \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^2 E_0^2}{4m_e \omega^2}. \quad (3.76)$$

Таким образом, на электрон действует сила с потенциалом  $U = eE_0^2/4m_e\omega^2 = e^2 \langle E^2 \rangle / 2m_e\omega^2$ . В изотермической плазме ( $T_i = T_e = T$ ) эта сила уравновешивается градиентом давления

$$\frac{\partial}{\partial x} 2T \delta n = - \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Отсюда находим возмущение плотности

$$\delta n = - \frac{e^2 E_0^2}{8m_e \omega_{p0}^2 n T} = - \frac{3}{4} \frac{E_0^2}{8\pi \cdot 3T}, \quad (3.77)$$

т. е.  $\delta n/n$  приблизительно равно отношению плотностей высокочастотной и тепловой энергий. Теперь мы видим, что нелинейная добавка к частоте (3.74) имеет вид  $\alpha E_0^2$ , где  $\alpha = -\omega_{p0}/64\pi nT$ .

Для описания волны, близкой к плоской, можно воспользоваться параболическим уравнением (3.69), где  $v'_r = v_r/k_0 = 3T/m_e\omega_{p0}$ . Мы опять будем искать решение этого уравнения в виде бегущей с групповой скоростью волны огибающей. Снова полагаем  $E = \exp(iv_0 t) u$  ( $x = -v_r t$ ) и получаем уравнение (3.73):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{2v_0}{v'_r} u + \frac{2\alpha}{v'_r} u^3, \quad (3.78)$$

где  $2\alpha/v'_r = -e^2/24T^2$ . Это уравнение имеет решения типа солитона. В самом деле, будем искать решение в виде  $u = E_0/\text{ch}(x/\Delta)$ . При этом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u}{\Delta^2} - \frac{2u^3}{\Delta^2 E_0^2}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $u$  в (3.78), получим соотношения

$$v_0 = - \frac{v'_r}{2\Delta^2}, \quad E_0^2 \Delta^2 = - \frac{v'_r}{\alpha} = \frac{48T^2}{e^2}. \quad (3.79)$$

Как мы видим, каждый солитон тем уже, чем больше его амплитуда,  $\Delta \sim 1/E_0$ . Энергия солитона, пропорциональная  $E_0^2 \Delta$ , тем больше, чем больше его амплитуда, т. е.

$$\mathcal{E} \sim E_0 \sim \frac{1}{\Delta}. \quad (3.80)$$

Поправка к частоте колебаний  $\nu_0$  также растет по абсолютной величине при увеличении амплитуды солитона.

Еще раз подчеркнем, что при  $k_0 \Delta > 1$  рассмотренный нами солитон является фактически солитоном огибающей. Фазовая скорость образующей его волны  $v_\phi = \omega_{p0}/k_0$  может изменяться в широких пределах в зависимости от величины  $k_0$ . Для рассматриваемого здесь солитона с равновесным распределением плотности величина  $k_0$  ограничена сверху условием  $v_r < c_s$ , т. е. требованием, чтобы солитон был дозвуковым. Из этого условия вытекает  $k_0 d < \sqrt{m_e/m_i}$ , где  $d$  — дебаевская длина. Как видно из (3.78), величина  $k_0$  явно в это уравнение не входит. Поэтому  $k_0$  снизу ничем не ограничена, и при уменьшении  $k_0$  солитон огибающей непрерывно переходит в простой ленгмюровский солитон. В частности, при  $k_0 = 0$  групповая скорость также обращается в нуль, и солитон стоит на месте.

#### § 4. Взаимодействие волн

1. *Трехволновые процессы.* Рассмотрим теперь общий случай трехмерных нелинейных колебаний. Разумеется, в самом общем случае вряд ли можно продвинуться достаточно далеко: полной математической теории решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных пока не существует. Однако если предположить, что амплитуда колебаний не очень велика, можно воспользоваться методом теории возмущений. В первом приближении мы имеем просто линейную теорию с принципом суперпозиции, так что произвольное возмущение можно представить в виде совокупности собственных колебаний.

В линейном приближении довольно безразлично, какую из величин брать в качестве основной для описания колебаний, так как все величины (например, электрическое поле, скорости частиц, их плотность и т. д.) про-



порциональны одна другой. Но поскольку все колебания в плазме представляют собой электромагнитные волны, то в качестве основной величины удобно принять электрическое поле  $\mathbf{E}$ .

Таким образом, в линейном приближении

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_k \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \text{к. с.}, \quad (3.81)$$

где к. с. означает комплексно-сопряженную величину. Вспомним теперь, как выглядит уравнение для электромагнитной волны в плазме в фурье-представлении. Соответствующее выражение в линейном приближении было получено в гл. 2 [см. соотношение (2.93)]. Если, кроме самосогласованного тока, в плазме имеется еще сторонний ток  $\mathbf{j}_s$ , то уравнение для поля можно записать в виде

$$\omega \mathbf{D}_k - \frac{c^2 k^2}{\omega} \mathbf{E}_k + \frac{c \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{E}_k)}{\omega} = -4\pi i \mathbf{j}_{sk}. \quad (3.82)$$

Здесь, как мы знаем,  $\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ , где  $\hat{\epsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости. У однородного уравнения (3.82) имеются решения только для значений частоты, совпадающих с собственными частотами,  $\omega = \omega_k$ . Вблизи этих собственных частот будет максимальной амплитуда и для неоднородного уравнения (3.82), и поэтому достаточно рассмотреть именно собственные волны. При  $\omega = \omega_k$  поляризация волны  $\mathbf{e}_k = \mathbf{E}_k / E_k$  принимает вполне определенное значение, и умножая уравнение (3.82) на  $\mathbf{e}_k^*$ , мы получим скалярное уравнение для определения амплитуды колебаний:

$$\left( \omega \epsilon - \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega} \right) E_k = -4\pi i j_{sk}, \quad (3.83)$$

где  $\epsilon = \mathbf{e}_k^* \hat{\epsilon} \mathbf{e}_k$ ,  $k_{\perp}^2 = k^2 - |\mathbf{e}_k \mathbf{k}|^2$ ,  $j_{sk} = \mathbf{e}_k^* \mathbf{j}_s$ .

Вблизи  $\omega = \omega_k$  левую часть этого уравнения можно представить в виде  $A_k (\omega - \omega_k) E_k$ . Здесь для поперечных волн

$$A_k = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon), \quad \omega_k = \frac{c k_{\perp}}{\sqrt{\epsilon}},$$

а для продольных волн с  $k_{\perp} = 0$  само  $\epsilon$  обращается в нуль при  $\omega = \omega_k$  и величина  $A_k = \omega \partial \epsilon / \partial \omega$ . Таким обра-

зом, уравнение для  $E_k$  можно записать в виде

$$-i(\omega - \omega_k) E_k = -4\pi j_{sk}/A_k. \quad (3.84)$$

Как мы видим,  $E_k$  действительно велико вблизи  $\omega = \omega_k$  и даже расходится в самой точке  $\omega = \omega_k$ . Чтобы не усложнять ситуации этой расходимостью, можно несколько видоизменить уравнение (3.84), действуя в духе теории волновых пакетов. Для этого вспомним, что уравнение (3.84) написано для фурье-компоненты  $E_\omega$  волны вида  $E(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , т. е. фактически зависимость поля от времени дается выражением

$$\int E_\omega \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Представим это поле в виде  $E(t) = E_k(t) \exp(-i\omega_k t)$ , где

$$E_k(t) = \int E_\omega \exp(-i\omega t) d\omega \cdot \exp(i\omega_k t)$$

— медленно меняющаяся амплитуда волны вблизи собственной частоты  $\omega$ . Для этой амплитуды умножением (3.84) на  $\exp[-i(\omega - \omega_k)t]$  и интегрированием по  $\omega$  мы получим уравнение

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = -\frac{4\pi}{A_k} \exp(i\omega_k t) j_{sk}(t), \quad (3.85)$$

где  $j_{sk}$  — сторонний ток уже как функция времени. Заметим теперь, что при представлении любой реальной величины, скажем, поля  $E$ , в виде набора собственных волн (3.81) вместе с первой суммой всегда появляется еще комплексно-сопряженная ей. Так как в этой второй сумме стоят множители  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , то ее слагаемые имеют смысл  $E_{-\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{-\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , т. е. они как бы соответствуют членам с  $-\mathbf{k}$ . Таким образом, имеем

$$E_{-\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}^*, \quad \omega_{-\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}. \quad (3.86)$$

Соответственно каждую плоскую волну можно с одинаковым правом характеризовать как парой  $\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}$ , так и парой  $-\mathbf{k}, -\omega_{\mathbf{k}}$ , инвариантной величиной является лишь фазовая скорость  $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}/k^2$ . Но мы ранее приняли для энергии и импульса выражения  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} N_{\mathbf{k}}$ , где  $N_{\mathbf{k}}$  — число волн, стало быть, в этих выражениях можно пользоваться только одной из указанных пар. Представляется более целесообразным выбирать знак частоты в соответствии со знаком энергии, т. е.

положительный для волны положительной энергии и тогда  $\mathbf{k}$  совпадает с направлением импульса. При этом сохраняет свою форму выражение  $\mathcal{E}_k = \omega_k N_k$  для энергии. Но для импульса тогда тоже следует сохранить выражение  $\mathbf{P}_k = k N_k$ , чтобы произведение импульса на фазовую скорость  $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{k} \omega_k / k^2$  совпадало с энергией. Следовательно, в выражении для импульса  $\mathbf{P}_k = k N_k$  волновой вектор  $\mathbf{k}$  играет роль элементарной порции импульса. Для волн с отрицательной энергией, таким образом, мы используем пару  $\omega_k, \mathbf{k}$  с отрицательным значением  $\omega_k$ . Импульс волны с отрицательной энергией, как мы видим, направлен против фазовой скорости, поскольку  $\mathbf{v}_\phi \mathbf{P}_k = \mathcal{E}_k < 0$ .

После этих предварительных замечаний вернемся к вопросу о поведении слабо нелинейных волн. Если амплитуда колебаний плазмы не очень мала, то в уравнениях движения для частиц или в кинетических уравнениях для функций распределения следует учесть нелинейные члены. Тогда при выражении тока в плазме  $\mathbf{j}$  через поля, кроме линейного члена, приводящего к тензору  $\epsilon$ , следует учесть дополнительные нелинейные члены. Эти члены будут входить в уравнения Максвелла в виде добавки к току, т.е. в виде стороннего тока в уравнении (3.85). При слабой нелинейности достаточно учесть лишь квадратичные члены, составленные из всевозможных произведений отдельных слагаемых в выражении для  $\mathbf{j}_s$ . Из этих членов нужно выбрать только такие, пространственная зависимость которых имеет вид  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , так как в уравнении (3.85) выбрана уже только  $\mathbf{k}$ -компонента поля. Такими членами будут  $E_{\mathbf{k}'}, E_{\mathbf{k}''} \times \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r} + i\mathbf{k}''\mathbf{r})$  при  $\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}$ . При этом будут еще коэффициенты, зависящие от  $\mathbf{k}', \mathbf{k}''$ , явный вид которых определяется теми нелинейными членами, которые дают вклад в выражение нелинейного тока  $\mathbf{j}_s$ .

Далее, уравнения удобно записать сразу для амплитуд  $a_{\mathbf{k}}$ , так что  $N_{\mathbf{k}} = |a_{\mathbf{k}}|^2$ . Связь между  $a_{\mathbf{k}}$  и  $E_{\mathbf{k}}$  устанавливается, очевидно, соотношением (2.151) для энергии волны.

С учетом высказанных замечаний уравнение (3.85) для  $a_{\mathbf{k}}$  можно записать в виде

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k} \mathbf{k}' \mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}''} \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}})t], \quad (3.87)$$

где  $k'' = k - k'$ . Временной множитель появился вследствие того, что в нелинейные слагаемые было подставлено поле в виде суперпозиции собственных волн.  $V_{k k' k''}$  — некоторая функция от волновых векторов; явный вид ее определяется нелинейными членами уравнений движения. Величину  $V_{k k' k''}$  естественно назвать матричным элементом взаимодействия волн.

Итак, мы видим, что квадратичные слагаемые вида

$$E_k, E_{k''}, \exp [-i (\omega_{k'} + \omega_{k''}) t + i (k' + k'') r],$$

которые входят в нелинейный сторонний ток, играют роль вынуждающей силы с частотой  $\omega_{k'} + \omega_{k''}$  и волновым вектором  $k' + k''$ . Поскольку из-за действительности  $E$  в сумму обязательно должны входить попарно сопряженные слагаемые, то наряду с указанной силой должна присутствовать также вынуждающая сила с разностными частотой  $\omega_{k'} - \omega_{k''}$  и волновым вектором  $k' - k''$ .

Наглядно появление «биений» на комбинационных частотах  $\omega_{k'} \pm \omega_{k''}$  и волновых векторах  $k' \pm k''$  можно продемонстрировать с помощью рис. 37, где показано наложение двух плоских волн.

Каждую из штриховок рис. 37 можно рассматривать как волну ступенчатого вида, в которой амплитуда скачком меняется от нуля до единицы: нуль, где черная линия, и единица между ними (см. нижнюю часть рис. 37). При наложении (пересечении) таких волн образуется их произведение — черные полосы, где хотя бы одна из амплитуд «черная», и белое поле между ними. На рисунке отчетливо видно,

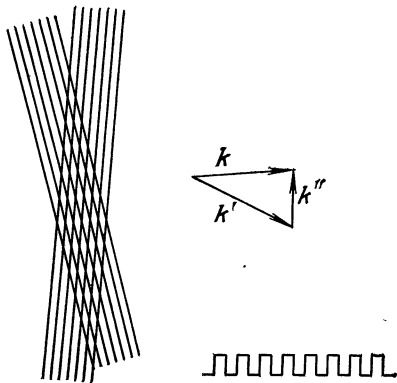


Рис. 37. «Биения» при нелинейном наложении двух плоских волн

что при наложении волн образуется муар — волна с волновым вектором  $k' - k''$ . (Кроме того, появляется более частая рябь на сумме  $k' + k''$ .) Если этот движущийся муар совпадет с одной из собственных волн, т. е. ком-

бинационная частота  $\omega_{k'} \pm \omega_{k''}$  окажется равной собственной частоте  $\omega_k$ , отвечающей волновому вектору биений  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' \pm \mathbf{k}''$ , то нелинейная вынуждающая сила приведет к раскачке волны  $\mathbf{k}$ . При этом согласно (3.87) амплитуда  $a_k$  будет медленно изменяться со временем.

Если расстройка  $\Delta = \omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k$  обращается в нуль и наступает резонанс, то даже при малой нелинейности по прошествии достаточно большого времени может произойти сильное изменение амплитуд колебаний. Такие процессы, в которых во взаимодействие вступают три волны, называются трехволновыми, а спектр (зависимость частоты  $\omega_k$  от  $\mathbf{k}$ ), для которого условие  $\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k''}$  может быть удовлетворено, называется распадным.

В плазме ввиду обилия различных ветвей колебаний распадные условия легко реализуются. Например, в сжимаемой плазме ( $\beta \neq \infty$ ) альвеновские и магнитозвуковые волны, хотя сами по себе и не являются распадными, могут распадаться на пару из альвеновской и магнитозвуковой волн. А геликоны (свисты) оказываются распадными даже сами по себе.

Трехволновые процессы приводят к возможности трансформации одних волн в другие и тем самым порождают сложный процесс переноса энергии в фазовом пространстве волновых чисел. Такие триадные процессы осуществляются, в частности, в гидродинамических системах [109].

2. *Взаимодействие трех волн.* Рассмотрим предельно простой случай, когда имеются только три волны  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , связанные между собой резонансным условием. Обозначим их амплитуды через  $a_i$ :  $a_1 = a_k$ ,  $a_2 = a_{k'}$ ,  $a_3 = a_{k''}$ , и соответственно частоты — через  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ . Будем считать, что все частоты положительны и притом  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 > \omega_2 > \omega_3$ .

Из (3.87) имеем для  $a_1$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = V_1 a_2 a_3, \quad (3.88)$$

где  $V_1 = V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''}$ .

Аналогичным образом можно получить уравнения для  $a_2$  и  $a_3$ . Для этого в первом случае мы в (3.87) вместо  $\mathbf{k}$  подставим  $\mathbf{k}'$ , а  $\mathbf{k}'$  заменим на  $\mathbf{k}$ :

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} = V_2 a_1^* a_3^*, \quad (3.89)$$

а во втором — вместо  $\mathbf{k}$  подставим  $\mathbf{k}''$  и  $\mathbf{k}'$  опять заменим на  $\mathbf{k}$ :

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} = V_3 a_1 a_2^*, \quad (3.90)$$

где  $V_2 = V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}'}$ ,  $V_3 = V_{\mathbf{k}'', \mathbf{k}, -\mathbf{k}'}$ .

В рассматриваемом здесь случае гидродинамического приближения, когда тепловое движение частиц несущественно, уравнения (3.87) — (3.90) получаются в результате фурье-преобразования исходных дифференциальных уравнений движения в частных производных. При этом коэффициенты  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}$  имеют одну и ту же фазу — они либо чисто мнимые, либо действительные. Для простоты будем считать их действительными (мнимость можно всегда устранить введением дополнительного множителя  $i$  в амплитуды  $a_i$ ). В уравнениях (3.87) — (3.90) динамическими переменными являются амплитуды  $a_{\mathbf{k}}$ . В эти амплитуды можно свободно вводить дополнительные множители с целью упрощения вида уравнений. Пронормируем опять амплитуды  $a_{\mathbf{k}}$  таким образом, чтобы энергия  $\mathbf{k}$ -й волны равнялась  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2$ . При этом ее импульс  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$  будет равен  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} |a_{\mathbf{k}}|^2$ , а величину  $N_{\mathbf{k}} = |a_{\mathbf{k}}|^2$  можно интерпретировать как число волн.

В силу законов сохранения энергии и импульса волн при взаимодействии матричные элементы, входящие в уравнения (3.88) — (3.90), не могут быть совершенно произвольными. В самом деле, умножая эти уравнения соответственно на  $\omega_i a_i^*$  и  $\mathbf{k}_i a_i^*$  ( $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}''$ ) и складывая их с комплексно-сопряженными уравнениями, в силу законов сохранения энергии и импульса

$$\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3 = \text{const} \quad (3.91)$$

$$\mathbf{k}_1 N_1 + \mathbf{k}_2 N_2 + \mathbf{k}_3 N_3 = \text{const}, \quad (3.92)$$

получим

$$\begin{aligned} \omega_2 (V_1 + V_2) + \omega_3 (V_1 + V_3) &= 0, \\ \mathbf{k}_2 (V_1 + V_2) + \mathbf{k}_3 (V_1 + V_3) &= 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

где мы учли, что  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ . Формула (3.93) представляет собой систему четырех скалярных однородных уравнений для двух величин  $V_1 + V_2$ ,  $V_1 + V_3$ . Переопределенная система имеет только нулевые реше-

ния и, следовательно,  $V_1 = -V_2 = -V_3$ . Кроме того, поскольку замена знака у всех  $k$  означает переход к комплексно-сопряженным величинам, а мы условились считать  $V_i$  действительными, то  $V_{k, k', k''} = V_{-k, -k', -k''}$ . Далее, как видно из (3.87), можно считать  $V_{kk'k''} = V_{k k'' k'}$ . Таким образом, мы получаем цепочку соотношений, выражающих свойства симметрии матричных элементов:

$$\begin{aligned} V_{k, k', k''} &= V_{k, k'', k'} = V_{-k, -k', -k''} = \\ &= -V_{k', k, -k''} = -V_{k'', k, -k'}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Соответственно и уравнения для амплитуд трех взаимодействующих волн принимают очень простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} &= V a_2 a_3, & \frac{\partial a_2}{\partial t} &= -V a_1 a_3^*, \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} &= -V a_1 a_2^*. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Теперь нетрудно установить, что эти уравнения имеют еще один интеграл движения. В самом деле, если первое из уравнений умножить на  $a_1^*$ , а второе — на  $a_2^*$  и затем сложить их вместе с комплексно-сопряженными соотношениями, то справа мы получим нуль и, следовательно,

$$N_1 + N_2 = \text{const}. \quad (3.96)$$

Аналогичным образом можно получить

$$N_1 + N_3 = \text{const}. \quad (3.97)$$

Но это соотношение является следствием (3.91) и (3.96), если учесть, что  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ . Интегралы (3.96), (3.97) называют обычно соотношениями Мэнли — Роу.

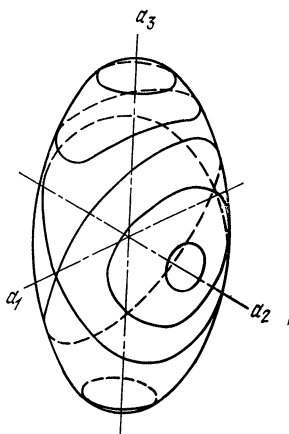
Итак, мы получили два интеграла движения (3.91) и (3.96), наличие которых накладывает существенные ограничения на взаимодействие волн. Чтобы более ясно представить себе эти ограничения, допустим, что амплитуды  $a_i$  — действительные. Тогда соотношения (3.91) и (3.95) могут быть представлены соответственно в виде

$$\omega_1 a_1^2 + \omega_2 a_2^2 + \omega_3 a_3^2 = \text{const}, \quad a_1^2 + a_2^2 = \text{const}. \quad (3.98)$$

Первое из них представляет собой уравнение эллипсоида в координатной системе  $(a_1, a_2, a_3)$  с полуосями  $1/\sqrt{\omega_1}$ ,  $1/\sqrt{\omega_2}$ ,  $1/\sqrt{\omega_3}$ , а второе соответствует цилиндру с осью

вдоль  $a_3$ . Амплитуды  $a_i$  при взаимодействии могут изменяться только таким образом, чтобы точка  $(a_1, a_2, a_3)$  перемещалась по линии пересечения этих поверхностей. Если учесть, что  $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ , то линии пересечения имеют вид, показанный на рис. 38.

Рис. 38. Траектории трех взаимодействующих волн с фиксированными фазами



Как мы видим, вблизи осей  $a_2$  и  $a_3$  траектории представляют собой маленькие эллипсы, каждая из волн  $a_2, a_3$  при малом возмущении совершает небольшие колебания вблизи начального значения (рис. 39,а). Что касается волны с максимальной частотой  $\omega_1$ , то она может «распадаться», т. е. полностью передавать свою

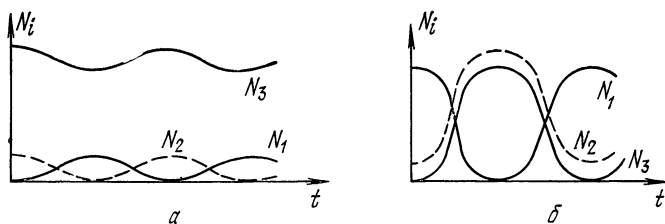


Рис. 39. Зависимость амплитуд взаимодействующих волн от времени при устойчивом (а) и неустойчивом (б) начальных состояниях

энергию волнам  $a_2, a_3$ , даже если их начальная амплитуда мала,  $a_2, a_3 \ll a_1$  (рис. 39,б). Из рис. 38 и 39,б видно, что процесс распада носит характер периоди-



ческой конверсии волны  $a_1$  в две другие  $a_2$ ,  $a_3$  и возвращения к исходному состоянию.

3. *Аналогия с уравнением Эйлера.* Рассмотренный процесс сходен со свободным движением твердого тела. В частности, процесс распада волны  $a_1$  в  $a_2$ ,  $a_3$  сходен со свободным движением несимметричного волчка, приведенного во вращение вокруг оси с промежуточным моментом инерции  $I_2$ , т. е.  $I_3 > I_2 > I_1$  (см. рис. 51 в [107]). Сходны и сами уравнения.

Напомним, что для свободного тела механический момент  $\mathbf{M}$ , будучи постоянным, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d'\mathbf{M}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}] = 0. \quad (3.99)$$

Здесь производная по времени со штрихом соответствует дифференцированию компонент  $\mathbf{M}$  в системе отсчета, связанной с телом, а второе слагаемое справа возникло из-за дифференцирования ортов подвижной системы. Так как в собственной системе отсчета  $\mathbf{M} = \{I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3\}$ , то компоненты угловой скорости согласно (3.39) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3, \quad (3.100)$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3, \quad (3.101)$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = -\frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2. \quad (3.102)$$

Эта система уравнений сходна с уравнениями (3.95) для амплитуд  $a_i$ . Она обладает интегралами движения  $2E = M_1^2/I_1 + M_2^2/I_2 + M_3^2/I_3 = \text{const}$  и  $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \text{const}$ . Пересечение этих поверхностей в системе с координатами  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  приводит к картине, очень сходной с распадом волн: движение тела устойчиво при вращении вокруг осей с экстремальными значениями моментов инерции  $I_1$ ,  $I_3$  и неустойчиво при вращении около оси с промежуточным значением момента инерции  $I_2$ . Сходными оказываются и аналитические выражения для зависимости от времени компонент угловой скорости  $\Omega_i(t)$  и амплитуд  $a_i(t)$  взаимодействующих волн.

4. *Взрывная неустойчивость.* При рассмотрении взаимодействия трех волн мы предполагали, что энергия всех волн положительна. Именно в этом предположении и были получены условия симметрии для матричных элементов и упрощены уравнения для амплитуд  $a_i$ . Однако в неравновесной плазме энергия волн может быть отрицательной и взаимодействие такой волны с волнами положительной энергии приводит к нелинейной неустойчивости «взрывного» типа [108]. Причина ее состоит в том, что, передавая энергию волнам с положительной энергией, волна с отрицательной энергией не уменьшает, а увеличивает свою амплитуду.

Допустим для определенности, что отрицательной энергией обладает волна  $a_1$ , которая по-прежнему обладает максимальной частотой. Так как мы условились сохранить для энергии и импульса волн с отрицательной энергией те же выражения  $\mathcal{E}_k = \omega_k N_k$ ,  $\mathbf{P}_k = \mathbf{k}N_k$ , но при этом для  $\omega_k$ ,  $\mathbf{k}$  брать пару с отрицательной частотой и волновым вектором, направленным против фазовой скорости  $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{k}\omega_k / k^2$ , то теперь для резонанса имеем

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = 0. \quad (3.103)$$

Соответственно из законов сохранения энергии и импульса получаем для матричных элементов  $V_1 = V_2 = V_3$ , т. е. уравнения для амплитуд трех связанных волн примут вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = V a_2 a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} = V a_1 a_3^*, \quad \frac{\partial a_3}{\partial t} = V a_1 a_2^*. \quad (3.104)$$

Если для простоты считать амплитуды действительными, то видно, что все три амплитуды растут одновременно. Поскольку эти уравнения сходны с уравнением  $dx/dt = x^2$ , то и их решения имеют вид, сходный с решением  $x = (t_0 - t)^{-1}$ , т. е.  $a_i \sim 1/(t_0 - t)$ . Таким образом, мы имеем дело с нелинейной неустойчивостью, имеющей характер «взрыва»: амплитуды волн нарастают до бесконечно больших значений за конечный промежуток времени  $t_0$ .

5. *Взаимодействие волн с хаотическими фазами.* Из уравнений для временной зависимости амплитуд трех взаимодействующих волн видно, что характерное время их изменения  $t \sim 1/Va$ . Если амплитуды волн малы, то это время очень велико, и в течение всего этого времени

для резонансно взаимодействующих волн должно выполняться условие синхронизма. Ясно, что чем меньше амплитуда, тем меньше допустимая расстройка  $\Delta$ , т. е.  $\Delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 \ll Va$ .

Но в реальных условиях плазменного эксперимента точный синхронизм осуществить очень трудно, поскольку в плазме могут иметься небольшие неоднородности, которые будут несколько изменять собственные частоты в пространстве или со временем, если эти неоднородности нестационарны. В этих условиях картина взаимодействия волн усложняется, но, вместе с тем, в условиях нерегулярности взаимодействия допустим другой приближенный подход, использующий так называемое приближение хаотических фаз. Поясним его на примере трех взаимодействующих волн с положительной энергией.

Умножая каждое из уравнений для амплитуд  $a_j$  на соответствующее  $a_j^*$  и складывая с комплексно-сопряженными соотношениями, мы можем написать уравнения для квадратов амплитуд:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} |a_1|^2 = V a_1^* a_2 a_3 + \text{к. с.}, \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = -V a_1 a_2^* a_3^* + \text{к. с.}, \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = -V a_1 a_2^* a_3^* + \text{к. с.}$$

Каждую из амплитуд  $a_j$  можно представить в виде  $|a_j| \exp(i\varphi_j)$ , где  $\varphi_j$  — фаза. Как видно из структуры уравнений (3.105), (3.106), во все члены правой части входит один и тот же фазовый множитель  $\exp[\pm i(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)]$ . Разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$  может меняться со временем как из-за взаимодействия трех волн между собой (с тем же характерным временем, что и амплитуды), так и вследствие неоднородностей среды. Последняя причина может привести даже к более быстрому изменению фазы. Разумеется, неоднородности плазмы приводят к флуктуациям амплитуды, так как при этом энергия волнового поля несколько перераспределяется в пространстве. Однако можно полагать, что колебания амплитуды будут значительно меньше колебаний фазы, так как с квадратом амплитуды связана сохраняющаяся величина —

плотность энергии, — и поэтому речь может идти только о небольшом перераспределении энергии по волновому пакету. Что касается фазы, то ее изменения ничем не ограничены, и в каждой точке пространства фаза легко изменяется на  $\pi$  простым перемещением участка волнового пакета на половину длины волны.

Таким образом, представляется разумным приближение, в котором амплитуды считаются постоянными, а фазы — быстропеременными случайными функциями времени. Другими словами, в уравнениях (3.105), (3.106) можно положить  $a_j \approx \sqrt{N_j} \exp(i\varphi_j)$  и произвести усреднение по фазам  $\varphi_j$ . Но при таком усреднении в правой части мы получим нуль. Это значит, что в правой части нам нужно учесть малые добавки к амплитудам нулевого приближения, т. е. положить

$$a_{j_1} = \sqrt{N_{j_2}} \exp(i\varphi_j) + \delta \tilde{a}_j. \quad (3.107)$$

Здесь  $\delta \tilde{a}_j$  — малая добавка, которая может быть получена из уравнений для амплитуд в первом приближении

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \tilde{a}_1 = V \sqrt{N_1 N_2} \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т. е.

$$\delta \tilde{a}_1 = V \sqrt{N_1 N_2} \int_{t_0}^t \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)] dt, \quad (3.108)$$

где  $t_0$  — большое отрицательное значение времени, когда начальное значение  $\delta \tilde{a}_1$  можно считать нулем. В (3.108) мы вынесли  $\sqrt{N_1 N_2}$  из-под интеграла, считая, что за время заметного изменения фаз  $N_j$  можно считать постоянными. Подставляя теперь в правую часть уравнений (3.105), (3.106) для  $N_j$  попеременно вместо каждого из сомножителей его малую поправку  $\delta \tilde{a}_j$  и усредняя по фазам, мы получим уравнения для  $N_j$  в первом неисчезающем приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= W(N_2 N_3 - N_1 N_2 - N_1 N_3), \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} &= \frac{\partial N_3}{\partial t} = - \frac{\partial N_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Здесь

$$W = 2V^2 \tau, \quad \tau = \left\langle \exp [i \theta(t)] \int_{-\infty}^t \exp [-i \theta(t')] dt' \right\rangle,$$

$\theta$  — сумма любых двух случайных фаз, например  $\theta = \varphi_1 + \varphi_2$ . Величина  $\tau$  определяет характерное время корреляции фаз.

Из уравнений для  $N$  в приближении хаотических фаз опять следуют соотношения Мэнли — Роу  $N_1 + N_2 = \text{const}$ ,  $N_1 + N_3 = \text{const}$ , и соответственно опять выполняются законы сохранения энергии и импульса. Эти уравнения имеют стационарное решение  $N_j = \text{const}/\omega_j$ , соответствующее равномерному распределению энергии по степеням свободы, т. е. закону Рэлея — Джинса:

$$\mathcal{E}_j = \omega_j N_j = T_0 = \text{const}.$$

Действительно, если в правую часть уравнения (3.109) подставить выражение  $N_j = T_0/\omega_j$ , вынося общий множитель  $N_1 N_2 N_3 / T_0$ , мы получим в скобках  $(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) = 0$  в силу резонансного условия для частот.

Уравнения для  $N_j$  имеют простую квантово-механическую аналогию, если  $N_j$  интерпретировать как число квантов (т. е. ввести постоянную Планка  $\mathcal{E}_k = \hbar \omega_k N_k$  и положить ее затем равной 1 выбором соответствующей системы единиц). Тогда для процесса комбинационного рассеяния кванта  $\hbar \omega_1$  в два кванта  $\hbar \omega_2 + \hbar \omega_3$  и обратного процесса слияния двух квантов в один можно написать уравнение

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = W [N_2 N_3 (N_1 + 1) - N_1 (N_2 + 1)(N_3 + 1)]. \quad (3.110)$$

Здесь  $W$  — вероятность перехода, а единицы в конечном состоянии добавлены для учета спонтанного перехода бозе-частиц из одного состояния в другое. Если числа заполнения  $N_j$  значительно больше единицы, то в этом уравнении достаточно сохранить только квадратичные члены, и оно совпадет с (3.109).

6. *Взаимодействие высокочастотных волн с низкочастотной.* До сих пор мы рассматривали взаимодействие только трех волн. В принципе число волн, участвующих во взаимодействии, может быть значительно больше. В приближении трехволнового взаимодействия мы имеем дело с суперпозицией зацепляющихся троек, или трип-

летов, волн. При этом взаимодействие может быть либо при фиксированных фазах, если условия резонанса соблюдаются с хорошей точностью, либо со случайными фазами, если волны не вполне регулярны или среда имеет слабые нерегулярные неоднородности.

В качестве простого примера большого числа взаимодействующих волн с фиксированной фазой рассмотрим взаимодействие высокочастотных волн с длинноволновой медленной волной [110]. Например, это может быть взаимодействие высокочастотной электромагнитной волны с ионным звуком. Такой случай соответствует рис. 37, когда муар от высокочастотных волн попадает в резонанс с собственной низкочастотной волной.

Обозначим амплитуду низкочастотной волны через  $b$ , а ее волновой вектор и частоту соответственно через  $\kappa$  и  $\nu$ . Пусть волновое число основной волны равно  $k_0$ , причем  $k_0 \gg \kappa$ . Тогда с основной волной может взаимодействовать волна  $k_1 = k_0 + \kappa$ , с ней в свою очередь может взаимодействовать волна  $k_2 = k_0 + 2\kappa$  и т. д. Таким образом, кроме двух основных волн  $k_0$ ,  $\kappa$ , во взаимодействии может участвовать целый набор волн с волновыми числами  $k_n = k_0 + n\kappa$ , где  $n$  — произвольное положительное или отрицательное целое число. Обозначим через  $a_n$  амплитуду волны  $k_0 + n\kappa$ , так что  $a_0$  соответствует основной высокочастотной волне. Будем считать, что волны находятся в точном резонансе, т. е.  $\omega_n = \omega_{n-1} + \nu$  или  $\omega_k = \omega_{k-\kappa} + \nu$ .

Так как по предположению  $\kappa$  мал, то  $\omega_{k-\kappa} \approx \omega_k - (\partial\omega/\partial k)\kappa$  и условие резонанса можно приближенно записать в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \kappa = \nu, \quad \kappa = \nu. \quad (3.111)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае малых  $\kappa$  условие резонанса соответствует совпадению групповой скорости высокочастотного пакета и фазовой скорости низкочастотных волн. Поскольку  $\kappa$  мал, то матричный элемент в (3.87) можно считать не зависящим от  $n$ , так что уравнение для  $a_n$  можно записать в виде

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} = iV (a_{n+1} b^* + a_{n-1} b), \quad (3.112)$$

где  $V$  — некоторое число, которое мы будем считать действительным. (Как будет видно из дальнейшего, удоб-

но выбрать такую нормировку амплитуд, чтобы матричный элемент взаимодействия  $iV$  был чисто мнимым.) Аналогично для  $b$  имеем

$$\frac{\partial b}{\partial t} = iV \sum_n a_n a_{n-1}^*. \quad (3.113)$$

Мы считаем, что матричные элементы взаимодействия в (3.112) и (3.113) совпадают, что имеет место при определенной нормировке амплитуд  $a_n$  и  $b$ .

Допустим, что в начальный момент была возбуждена только одна волна с амплитудой  $a_0^0$  и имелась малая примесь низкочастотной волны с амплитудой  $b$ . Примем для простоты, что  $b$  — действительно (фаза волны зависит от выбора начала координат). Тогда, воспользовавшись известным рекуррентным соотношением для функций Бесселя

$$2 \frac{dJ_n}{dx} = J_{n-1} - J_{n+1},$$

нетрудно проверить, что решением (3.112) является

$$a_n = i^n a_0^0 J_n(2V \int b dt). \quad (3.114)$$

Отсюда видно, что за счет взаимодействия с низкочастотной волной со временем появляются все более и более высокие гармоники  $a_n$ , причем при  $t \rightarrow \infty$  они в среднем выравниваются по амплитуде, так как  $J_n(x) \sim \sim \text{const}/\sqrt{x}$  при больших  $x$  (при  $n < \sqrt{x}$ ). Появление гармоник  $a_n$  соответствует просто модуляции исходной волны, что видно из соотношения

$$\begin{aligned} E &= \sum_n a_n \exp(-i\omega_n t + ik_n r) = \\ &= \exp(-i\omega_0 t + ik_0 r) \sum_n a_n \exp(-invt + in\kappa r) = \\ &= \exp[-i\omega_0 t + ik_0 r - i\lambda \cos(vt - \kappa r)], \end{aligned} \quad (3.115)$$

где  $\lambda = 2V \int b dt$ . Таким образом, в рассматриваемом случае  $\kappa \ll k_0$  и не зависящего от  $n$  матричного элемента модуляция волны является чисто фазовой.

Подставляя найденные выражения для  $a_n$  (3.114) в уравнение (3.113) для  $b$ , получим

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -V \sum_n J_n(\lambda) J_{n-1}(\lambda). \quad (13.16)$$

Но выражение справа в силу известной теоремы сложения для функций Бесселя обращается в нуль. Таким образом, модуляция высокочастотной волны происходит при постоянной амплитуде низкочастотной волны. Если учесть небольшую несимметрию матричных элементов взаимодействия, т. е. их зависимость от  $n$ , то амплитуда низкочастотной волны также будет изменяться со временем — либо нарастать, либо испытывать низкочастотные колебания. Все зависит от того, в какую сторону — меньших или больших частот — преобладает трансформация высокочастотных волн.

Нелинейное взаимодействие высокочастотной волны с плазменными колебаниями наблюдалось экспериментально в работе Стерна и Тцоара [111]. Соответствующие данные приведены на рис. 40. Как мы видим, при

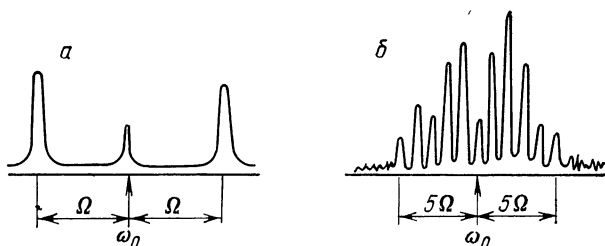


Рис. 40. Параметрическое возбуждение ионно-звуковой и ленгмюровской волны при малой (а) и большой (б) амплитудах волны накачки;  $\omega_0$  — частота накачки,  $\Omega$  — ионно-звуковая частота

таким взаимодействии в плазме возбуждаются ионно-звуковые и ленгмюровские колебания (частота волны накачки была близка к ленгмюровской), причем по мере роста амплитуды накачки число сателлитов возрастает, как это следует из теории взаимодействия волн.

7. *Четырехволновые процессы.* Если спектр нераспадный, т. е. зависимость  $\omega_{\mathbf{k}}$  от  $\mathbf{k}$  такая, что удовлетворить соотношению  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$  нельзя, то приходится учитывать следующий, кубичный по амплитуде член взаимодействия волн. В этом случае резонансная перекачка энергии волн по спектру происходит за счет четырехволновых процессов, когда выполнены условия

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (3.117)$$



для рассеяния двух волн  $k_1, k_2$  в две другие  $k_3, k_4$ , либо аналогичные условия для распада одной волны на три или слияния трех волн в одну. В этом случае взаимодействие является малым третьего порядка по амплитуде, а в случае хаотических фаз — третьего порядка по числу волн  $N_k$ . Разумеется, четырехволновые процессы являются основными и в том случае, когда с самого начала нелинейность является кубической, как, например, в рассмотренном выше уравнении, описывающем самофокусировку и самосжатие волновых пакетов. Сами эти процессы можно рассматривать и на языке четырехволновых взаимодействий волн с близкими волновыми векторами  $k, k \pm k$ . Более подробно с четырехволновыми процессами можно познакомиться в [73—75]. В плазме они могут проявляться только в некоторых частных случаях, когда трехволновые процессы оказываются запрещенными.

8. *Обращение волнового фронта.* Еще один класс нелинейных явлений связан с так называемым обращением волнового фронта [112а]. Рассмотрим сначала простой мысленный эксперимент. Пусть в сыпучей среде, например в песке, распространяется монохроматическая звуковая волна, которая может рассматриваться как набор плоских волн вида  $a_k \exp(-i\omega t + ikr)$ . Если мы приложим, кроме того, однородное электрическое поле с той же частотой  $\omega$ , то появится квадратичный эффект вида  $b_k \exp(ikr)$ , где  $b_k$  пропорционально  $a_k$ , не зависящий от частоты. Это неподвижное волновое возмущение в сыпучей среде может запомниться, как застывшая волна слабой деформации среды.

Если отключить оба сигнала, то застывшая волна сохранится в песке в виде записанной информации. Если через некоторое время мы опять приложим однородное электрическое поле, то квадратичный эффект породит волны вида  $c_k(\pm i\omega t + ikr)$ . Одна из этих волн будет распространяться точно противоположно первоначально излученной звуковой волне: происходит обращение волнового фронта. Датчики, расположенные на поверхности песка, зарегистрируют отклик в тех точках, где первоначально находились излучатели.

Нетрудно видеть, что рассмотренный нами пример запоминания застывшей волны сходен с известным в оптике явлением получения голограммы: переменное электрическое поле играет роль опорной волны, при ин-

терференции с которой звуковая волна образует возмущение типа голограммы.

Обращение волнового фронта может происходить и при индуцированном рассеянии волн, т. е. в процессе, сходном с распадом волн. Допустим, что электромагнитная волна  $\omega, k$  распадается на две волны: электромагнитную  $\omega', k'$  и низкочастотную  $\Omega, \kappa$ . Если частота  $\Omega$  мала, то  $\omega' = \omega - \Omega \approx \omega$ , т. е. частота рассеянной волны близка к частоте падающей волны. Закон сохранения импульса  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \boldsymbol{\kappa}$  удовлетворяется при  $|k'| \cong |k|$ , если  $\mathbf{k}' \cong -\mathbf{k}$ , а величина  $\boldsymbol{\kappa} \approx 2\mathbf{k}$ . При этом рассеянная электромагнитная волна распространяется в противоположном направлении по сравнению с падающей волной: происходит обращение волнового фронта.

## ВОЛНЫ И ЧАСТИЦЫ В ПЛАЗМЕ

## § 1. Нелинейное затухание Ландау

1. *Резонансные частицы и их взаимодействие с волной.* Все предыдущее рассмотрение нелинейных волн носило довольно общий характер и было применимо практически к любой сплошной среде. Никакой специфики плазмы как системы частиц с дальнедействующими силами в этом рассмотрении учтено не было. Между тем такая специфика существует и связана она прежде всего с тем, что в нелинейных коллективных явлениях может происходить не только взаимодействие волн с волнами, но и волн с частицами. Простейшим и достаточно важным явлением такого вида является взаимодействие частиц с волной конечной амплитуды, которое проявляется в так называемом нелинейном затухании Ландау [113—116].

Допустим, что в плазме возбуждена ленгмюровская волна малой, но конечной амплитуды. Будем считать, что длина волны достаточно велика по сравнению с дебаевским радиусом экранирования  $d$ , так что фазовая скорость волны  $v_\phi = \omega/k$  значительно больше тепловой. В этих условиях, с одной стороны, мала тепловая поправка к частоте и можно считать  $\omega = \omega_{pe}$ , а с другой — мало число резонансных частиц.

Покажем сначала, что в холодной плазме амплитуда плоской ленгмюровской волны может быть конечной, причем волна остается гармонической. В самом деле, в этом случае уравнение движения электронов можно написать в лагранжевой форме

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi(x, t) = - \frac{e}{m_e} E(x + \xi, t), \quad (4.1)$$

где  $\xi$  — смещение электрона, находившегося в равновесии в точке  $x$ . Но при смещении слоя электронов, скажем, вправо число электронов слева от смещенного слоя остается неизменным, если только не возникает многопоточкового движения. Поэтому электрическое поле будет определяться избыточным числом ионов, оказавшихся слева от рассматриваемого слоя электронов, т. е.  $E(x +$

$+ \xi, t) = 4\pi en_0 \xi$ . Поэтому уравнение (4.1) принимает вид

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\omega_{pe}^2 \xi, \quad (4.2)$$

где  $\omega_{pe}$  — ленгмюровская электронная частота. Отсюда видно, что в одномерном случае электроны совершают гармонические колебания с частотой  $\omega_{pe}$  и с конечной амплитудой, если только последняя не становится настолько большой, что начинает происходить пересечение траекторий и образование многопоточковых движений.

Итак, в приближении холодных электронов можно считать, что ленгмюровская волна имеет малую, но конечную амплитуду и ее потенциал является гармонической функцией вида  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_{pe} t - kx)$ . С учетом теплового разброса следует принять во внимание, что эта волна может взаимодействовать с резонансными частицами, скорость которых близка к фазовой скорости волны  $\omega_{pe}/k$ . Если фазовая скорость много больше тепловой скорости электронов, то резонансных частиц будет экспоненциально мало, и, следовательно, можно ожидать, что их влияние на волну конечной амплитуды будет малым. В этих условиях можно действовать в духе теории возмущений. В первом приближении мы будем считать волну стационарной и рассмотрим поведение резонансных частиц в такой волне, а затем уже можно попытаться учесть эффект обратного влияния резонансных частиц на волну.

Итак, рассмотрим резонансные частицы. Для этого удобно перейти к системе отсчета, движущейся вместе с волной. В этой системе отсчета волна представляет собой стационарное возмущение электрического поля:  $\varphi = \varphi_0 \cos kx$ . Электроны в таком поле можно разбить на два класса: захваченные, совершающие финитные колебания вблизи точек с максимальным потенциалом  $\varphi_0$ , и пролетные, энергия которых

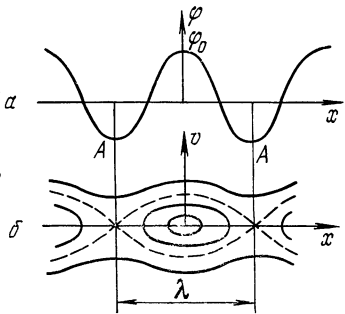


Рис. 41. Фазовые траектории электронов в волне

достаточно велика для преодоления потенциального барьера.

Движение частиц удобно рассматривать на фазовой плоскости  $(x, v)$ . На рис. 41, *а* представлена зависимость  $\varphi$  от  $x$ , а на рис. 41, *б* изображены фазовые траектории электронов при их движении в волне. Электроны с малыми скоростями захватываются волной. На электрон, захваченный, например, вблизи  $x=0$ , действует сила

$$-eE = e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e\varphi_0 k \sin kx \approx -e\varphi_0 k^2 x,$$

так что он будет совершать колебания с частотой

$$\Omega = k \sqrt{\frac{e\varphi_0}{m_e}}. \quad (4.3)$$

По мере увеличения амплитуды колебаний электронов частота уменьшается, и на сепаратрисе, отделяющей захваченные частицы от пролетных и изображенной пунктиром на рис. 41, *б*, она обращается в нуль, так как соответствующие электроны могут бесконечно долго находиться на «вершине»  $A$  потенциальной энергии  $-e\varphi$ . Средняя скорость пролетных частиц вблизи сепаратрисы также очень мала и возрастает по мере удаления от сепаратрисы.

Так как полная энергия электрона

$$\frac{m_e (v - v_\phi)^2}{2} - e\varphi = \text{const},$$

а в точке  $A$  скорость  $v - v_\phi = 0$ , полуширина сепаратрисы при  $x=0$  равна, очевидно,  $\Delta v = 2\sqrt{e\varphi_0/m_e}$ , т. е. она убывает с амплитудой волны гораздо медленнее, чем по линейному закону. Это значит, что в волне даже очень малой амплитуды может быть относительно много захваченных частиц.

Рассмотрим теперь, как будет эволюционировать функция распределения резонансных частиц со временем. Так как ширина области взаимодействия  $\Delta v$  велика, малым линейным возмущением  $f$  в этой области можно пренебречь, т. е. можно считать, что начальная функция распределения резонансных частиц совпадает с невозму-

щенной. Мы будем считать, что она убывает с  $v$  так, как показано на рис. 42, *a* сплошной линией.

Учтем теперь, что уравнение Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (4.4)$$

можно рассматривать как уравнение непрерывности для некоторой субстанции с плотностью  $f$  при течении на фа-

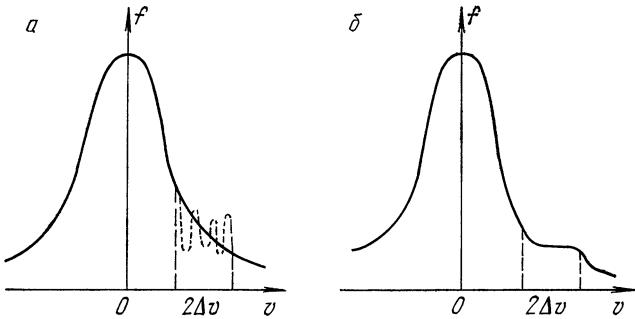


Рис. 42. Образование быстрых осцилляций (*a*) и «плато» (*б*) на функции распределения

зовой плоскости. Так как скорость  $v$  не зависит от  $x$ , а ускорение — от  $v$ , то

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.5)$$

т. е. это течение является несжимаемым. Следовательно, величина  $f$  сохраняется вдоль линий тока. Зная эти линии и начальную функцию, нетрудно представить себе, как будет изменяться  $f$ . Рассмотрим сначала захваченные частицы. Покажем сплошной штриховкой область при меньших скоростях, где функция  $f$  больше (рис. 43, *a*). Так как захваченные частицы совершают колебания с частотой порядка  $\Omega$ , внутренняя часть фазовой области захваченных частиц будет вращаться, так что через полпериода картина приобретает вид рис. 43, *б*. Частицы, лежащие на сепаратрисе, не вращаются; поэтому эти линии остаются на месте, а для большей части частиц происходит перестановка — плотность быстрых электронов становится больше плотности медленных, т. е. производ

ная  $\partial f / \partial v$  для захваченных частиц меняет знак. Затем эта смена знака будет происходить через каждую половину периода, и по мере увеличения  $t$  картина будет принимать вид все более и более мелких осцилляций (см. рис. 43, *в* и пунктир на рис. 42, *а*). Аналогичное «размешивание» имеет место и для пролетных «резонансных»

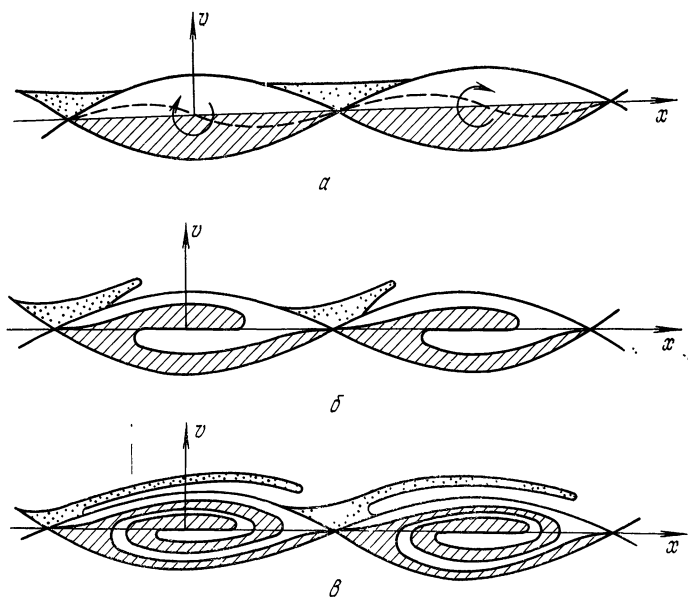


Рис. 43. Движение резонансных частиц в волне

частиц, находящихся близко от сепаратрисы (точечная штриховка на рис. 43).

Благодаря эффекту «размешивания» довольно быстро (по сравнению со средней частотой столкновений) должно достигаться настолько быстро осциллирующее на фазовой плоскости состояние  $f$ , что в игру могут вступать кулоновские столкновения. Как известно, кулоновские столкновения приводят к диффузии в пространстве скоростей, и поэтому эффективное время релаксации мелких осцилляций в фазовом пространстве гораздо меньше среднего времени столкновений для гладкой функции распределения. Вследствие совместного действия «размешивания» и кулоновских столкновений функция распределения в

области резонансных частиц должна «сгладиться» около некоторого среднего значения, т. е. на ней должно появиться «плато» (см. рис. 42, б). Однако в течение достаточно большого промежутка времени затухание волны из-за столкновений можно считать еще малым, так что волна длительное время будет чисто периодической.

Заметим, что эта волна соответствует стационарному решению линеаризованного уравнения Власова. В такой волне особенность в точке  $\omega - kv = 0$  устраняется благодаря образованию «ступеньки» на функции распределения с  $\partial f_0 / \partial v = 0$  в резонансной точке, что автоматически приводит к интегрированию особенности в смысле главного значения в дисперсионном уравнении (2.116).

Таким образом, стационарная волна физически может быть реализована как результат эволюции волны с конечной амплитудой. Для стационарности достаточно, чтобы функция распределения с принятой точностью была постоянной вдоль линии тока в фазовом пространстве.

Мысленно можно представить себе возможность образования сразу незатухающей волны: для этого достаточно одновременно с возмущением потенциала, создаваемым нерезонансными частицами, произвести такое возмущение функции распределения резонансных частиц, чтобы в последующие моменты времени она оставалась постоянной (в системе отсчета, движущейся с волной). Например, если функция распределения захваченных частиц внутри сепаратрисы на рис. 43 будет постоянной, то движение запертых частиц не будет менять функцию распределения (аналогичная картина имеет место для пролетных частиц вблизи сепаратрисы). Отсюда видно, что стационарные ленгмюровские волны соответствуют такой добавке резонансных частиц, при которой сразу образуется что-то вроде плато. Такие волны называют волнами Бернштейна — Грина — Крускала (сокращенно БГК) [117]. Если число дополнительных резонансных частиц увеличивать, то мы получим как бы волну с модулированным в пространстве пучком, что соответствует переходу к волне Ван-Кампена. Собственно волны Ван-Кампена соответствуют стационарным модулированным пучкам, пронизывающим плазму.

Теперь, после того как мы познакомились с движением резонансных частиц, мы можем учесть их обратное



влияние на волну. Ясно, что к моменту первого полупериода колебаний резонансных частиц (рис. 43, б), когда они отбирают энергию от волны, амплитуда волны должна уменьшаться (рис. 44). Затем резонансные частицы начинают уменьшать свою

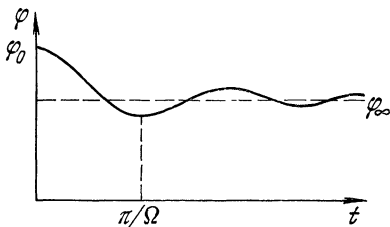


Рис. 44. Затухание волн конечной амплитуды

энергию, и амплитуда волны должна возрастать. В последующие моменты времени, когда запертые частицы, совершающие колебания с различными частотами от нуля до  $\Omega$ , приводят к «размешиванию» функции распределения в фазовом пространстве, размах колебаний амплитуды волны должен затухать, а при  $t \rightarrow \infty$  амплитуда стремится к некоторому предельному значению  $\varphi_\infty$ .

Чем меньше резонансных частиц, тем ближе к единице отношение  $\varphi_\infty/\varphi_0$ . Если амплитуда волны  $\varphi_0$  стремится к нулю, то  $\Omega \rightarrow 0$  и первый полупериод колебаний амплитуды (см. рис. 44) растягивается до бесконечности, так что в линейном приближении осцилляции вообще отсутствуют и амплитуда монотонно убывает. При этом, разумеется, уже нельзя считать амплитуду постоянной, как это мы делали при рассмотрении движения запертых частиц в волне конечной амплитуды. Впрочем, и сами запертые частицы не успевают совершить ни одного колебания — они только начинают свое движение в волне, как показано на рис. 43, а штриховой линией, а их вклад в плотность заряда оказывается уже настолько существенным, что амплитуда волны заметно убывает. Можно сказать, что резонансные частицы имеют слишком большой вес в волне малой амплитуды.

Нетрудно оценить, при какой амплитуде волну можно считать линейной. Для этого достаточно сравнить плотность энергии волны

$$\mathcal{E} = \frac{E_0^2}{8\pi} = \frac{k^2 \varphi_0^2}{8\pi}$$

с плотностью той энергии, которая передается захваченным частицам при образовании плато. Ширина плато по-

рядка  $\Delta v \sim \sqrt{e\varphi_0/m_e}$ , а изменение энергии электрона при увеличении его скорости на  $\Delta v$  вблизи фазовой скорости  $\omega/k$  равно  $m_e\omega\Delta v/k$ .

Так как при образовании плато функция распределения изменяется на величину

$$\Delta f \sim \left. \frac{df_0}{dv} \right|_{v=\omega/k} \Delta v,$$

то изменение плотности энергии захваченных частиц по порядку величины равно

$$\Delta \mathcal{E} \sim m_e \frac{\omega}{k} \Delta v (\Delta f \Delta v) \sim m_e \left( \frac{e\varphi_0}{m_e} \right)^{3/2} v \left. \frac{df_0}{dv} \right|_{v=\omega/k}. \quad (4.6)$$

Сравнивая эту величину с плотностью энергии в волне, находим условие линейности ленгмюровской волны в плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям:

$$\sqrt{\frac{e\varphi_0}{T_e}} \ll \frac{1}{(kd)^4} \exp\left(-\frac{1}{2k^2d^2}\right). \quad (4.7)$$

Отсюда видно, что при очень малых  $kd$  волна даже очень малой амплитуды не может считаться линейной. Это связано с тем, что для таких волн число резонансных электронов экспоненциально мало и соответственно их затухание очень быстро прекращается. Напротив, при  $kd \gg 1$  волна может считаться линейной даже при умеренных значениях  $e\varphi_0/T_e$ .

Рассмотрение затухания волны конечной амплитуды проясняет и вопрос об обратимости во времени. Этот вопрос состоит в следующем. С одной стороны, кинетическое уравнение с самосогласованным полем в отсутствие столкновений является полностью обратимым во времени: оно сохраняет свой вид при замене  $t$  на  $-t$  и обращении скоростей частиц. Поэтому все процессы, описываемые этим уравнением, должны быть обратимыми. Но, с другой стороны, наличие экспоненциального затухания волн в линейном приближении, казалось бы, указывает на явную необратимость: по прошествии достаточно большого промежутка времени система заряженных частиц может полностью «забыть» о том, что в ней распространялась волна. Чтобы выяснить этот вопрос, обратимся опять к рис. 43.

Если столкновений нет, то картина эволюции функции распределения резонансных частиц полностью обратима. При замене скоростей захваченных частиц на обратные «змея» на рис. 43, в должна начать разворачиваться, затем она пройдет через состояние  $t=0$  и снова начнет свертываться. Соответственно и на амплитуде  $\varphi_0(t)$  появятся сначала осцилляции, затем  $\varphi_0$  достигнет максимального значения, соответствующего  $t=0$ , и вся картина затухания с осцилляциями вновь повторится.

Аналогичная картина обратимости должна иметь место и в случае волны малой амплитуды, т. е. в случае большого числа резонансных частиц. Разумеется, при этом никакого захвата частиц не происходит: волна затухает гораздо раньше, чем успеет произойти хотя бы

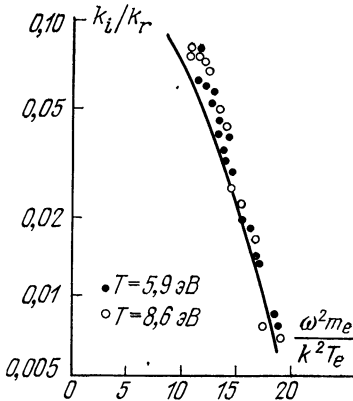


Рис. 45. Зависимость декремента затухания от квадрата отношения фазовой скорости к средней тепловой

одно колебание запертых частиц. Происходит как бы расползание отдельных групп резонансных частиц, которое сопровождается отбором энергии у волны, так что в конце концов вся энергия колебаний передается резонансным частицам. Но этот процесс также является обратимым. Даже после затухания волны до крайне малой амплитуды среда может длительное время (пока не начнут играть роль столкновения) сохранять «память» о начальном возмущении, и при обращении скоростей частиц весь процесс пошел бы в обратном направлении. Практически, разумеется, нельзя обратить скорость всех частиц, однако «память» о колебаниях может проявляться в эффектах типа эха.

2. *Эксперименты по затуханию Ландау.* Первым наиболее подробным и прямым исследованием затухания Ландау в продольных колебаниях, по-видимому, является эксперимент Малмберга, Уортона и Драммонда [118]. В этом эксперименте измерялось пространственное затухание продольной электронной волны вида  $\exp(-i\omega t + ik_r x - k_i x)$ , возбуждаемой с помощью высокочастотных колебаний, подаваемых на ленгмюровский зонд. Плазма с плотностью  $10^8$ — $10^9$  см<sup>-3</sup> и температурой от 5 до 20 эВ создавалась с помощью плазмотрона. Для регистрации колебаний служил второй ленгмюровский зонд. На рис. 45 представлены результаты измерения затухания (отношение мнимой части волнового числа  $k_i$  к действительной  $k_r$ ) в зависимости от квадрата отношения фазовой скорости  $v_\phi = \omega/k$  к средней тепловой

$$v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}.$$

Так как  $k_i$  пропорционально декременту затухания, величина  $k_i/k_r$  должна экспоненциально убывать с  $(\omega/kv_{Te})^2$ . Видно, что такая зависимость действительно имеет место, причем экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретическую кривую.

Чтобы проверить, действительно ли это затухание связано с резонансными электронами, авторы работы [118] изменяли потенциал торцевого электрода и тем самым «обрезали хвост» максвелловского распределения, т. е. устраняли наиболее быстрые электроны. Как только граница обрезания доходила до некоторого определенного значения  $v_*$ , наблюдалось резкое изменение затухания. Величина  $v_*$  оказалась близкой к фазовой скорости волны  $v_\phi = \omega/k$ , что убедительно свидетельствует о затухании волны на резонансных электронах.

В последующих экспериментах [119—122] было проведено более подробное исследование дисперсионного соотношения для плазменных волн. На рис. 46 представлены результаты Дерфлера и Симонена для зависимости частоты колебаний  $\omega$  и затухания (мнимой части волнового числа  $k_i$ ) от  $k_r$ , которые сравниваются с точным дисперсионным соотношением  $\varepsilon = 0$  [см. (2.116)] при произвольных  $kd$ . (График рис. 46 следует рассматривать скорее как зависимость  $k_r$  и  $k_i$  от  $\omega$ .) Как мы видим, экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретические кривые. Таким образом, в настоящее время не только затухание, но и полное дисперсионное соотношение

$\varepsilon(k, \omega) = 0$  можно считать надежно установленными в эксперименте.

Позднее Малмберг и Уортон [123] провели исследование затухания волн конечной амплитуды. Их результаты приведены на рис. 47, где показана эксперимен-

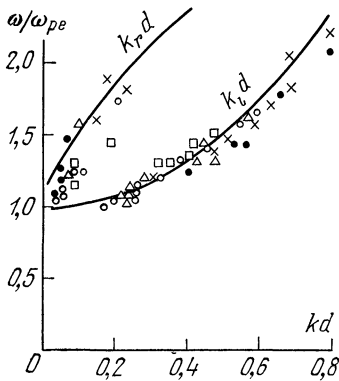


Рис. 46. Дисперсионные кривые для ленгмюровских волн

тально измеренная зависимость амплитуды колебаний от расстояния между зондом-излучателем и зондом-приемником.

Амплитуда отложена в относительных единицах. Кривая 1 относится к волне малой амплитуды. Если не общепринято не установилась плоская волна, то видно, что волна

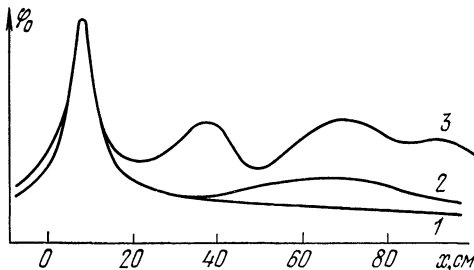


Рис. 47. Зависимость амплитуды колебаний от расстояния между зондом - излучателем и зондом-приемником при изменении потенциала зонда-излучателя  $V$ : 1 — 0,9; 2 — 2,85; 3 — 9 В

затухает монотонно по экспоненциальному закону. При увеличении амплитуды волны на зависимости амплитуды от расстояния появляются осцилляции, период которых уменьшается по мере увеличения амплитуды. Экспери-

мент показал, что волновое число  $K$  осциллирующей амплитуды при изменении потенциала  $V$ , подаваемого на зонд-излучатель, возрастало как  $\sqrt{V}$ . Эта зависимость хорошо согласуется с теоретической [см. (4.3)], по которой частота колебаний  $\Omega$ , а следовательно, и  $K$  должны возрастать как квадратный корень из амплитуды.

Итак, эффект затухания Ландау можно считать надежно подтвержденным экспериментально.

Возникает еще вопрос, можно ли экспериментально проверить, что затухание Ландау не приводит непосредственно к необратимости и что в бесстолкновительной плазме сохраняется «память» о затухших колебаниях. Такая проверка действительно была сделана в экспериментах с эхом.

## § 2. Эхо в плазме

1. *Спиновое эхо*. Напомним сначала, что представляет собой эхо. Эффект эха был обнаружен Ханом [125] в экспериментах по ядерному магнитному резонансу. Внешне он выглядит следующим образом. Если на частоте, близкой к резонансной, приложить два коротких импульса, разделенных промежутком  $\tau$  (рис. 48), то вслед за вторым импульсом через время  $\tau$  появляется импульс, соответствующий спонтанному излучению ядерных спинов на резонансной частоте. Этот эффект, который носит название спинового эха, был объяснен самим Ханом.

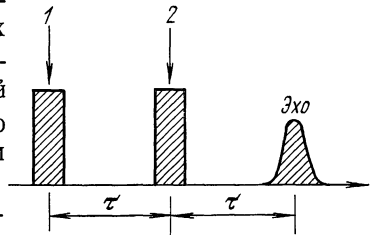


Рис. 48. Спиновое эхо

Рассмотрим систему ядерных спинов в сильном магнитном поле и допустим, что в начальный момент все магнитные моменты направлены вдоль поля (ось  $z$  на рис. 49). Как известно, наложение резонансных высокочастотных колебаний приводит к тому, что спины начинают отклоняться от оси  $z$ . Допустим для простоты, что первый импульс является 90-градусным, т. е. его амплитуда подобрана таким образом, что спины отклоняются на 90° и переходят на ось  $x$ . После прекращения импульса вследст-

вие прецессии магнитного момента должно иметь место излучение на резонансной частоте. Однако из-за малой неоднородности внешнего магнитного поля это излучение быстро прекращается. Так как частота прецессии  $\omega$  немного меняется от точки к точке, фазы различных

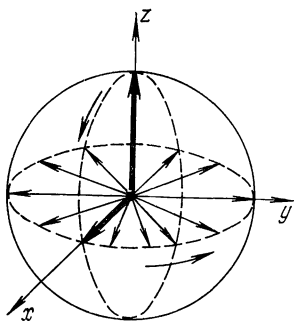


Рис. 49. Поворот и разбегание спинов при возбуждении 90-градусным импульсом

спинов вскоре «разойдутся», и в среднем по образцу их можно будет считать распределенными равномерно (рис. 49).

Допустим теперь, что в момент  $t = \tau$  прикладывается второй высокочастотный импульс. Картина выглядит проще всего, если второй импульс имеет вдвое большую амплитуду, т. е. является 180-градусным. При этом «веер» спинов на рис. 49 просто поворачивается на  $180^\circ$  вокруг оси  $y$ , что эквивалентно обращению времени: после этого все спины будут вращаться в плоскости «веера» в обратную сторону и через время  $\tau$  сойдутся на оси  $x$ . В этот момент и будет наблюдаться эхо — сильное излучение спинов в одной фазе.

Эффект эха меньшей амплитуды наблюдается и в том случае, если импульсы не являются точно 90- и 180-градусными.

Нетрудно видеть, что эффект эха тесно связан с существованием непрерывного спектра собственных колебаний. В самом деле, развертывание спинов в «веер» происходит именно из-за того, что в каждой точке пространства частота прецессии спинов имеет свое значение  $\omega(\mathbf{r})$ . Частота  $\omega(\mathbf{r})$  является непрерывной функцией координат, и если она меняется в пространстве, то колебания спинов в разных точках со временем будут расходиться

по фазам, так что в пространстве будет образовываться все более часто изрезанное волновое поле со все большими волновыми числами. Действительно, согласно (2.141) получим

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} t \rightarrow \infty.$$

Именно из-за разбегания по фазам соседних возмущений и исчезает макроскопический эффект излучения волн при прецессии спинов.

Приложение второго импульса приводит опять к отклику второго порядка, сильно изрезанному в пространстве, но эволюционирующему таким образом, что теперь волновое число убывает с возрастанием  $t$  и обращается в нуль при  $\Delta t = \tau$  после второго импульса.

2. *Простая демонстрация эха.* Чрезвычайно простая демонстрация эффекта эха была предложена Веденовым и Дыхне. Предположим, что мы имеем два раstra с разным периодом (например, две расчески с разным числом зубцов на единице длины). Пусть волновые числа этих растров, отвечающие основной гармонике, равны  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда если бросить на них рассеянный свет (например, от окна или матовой лампочки), то на расстоянии  $x$  от каждого раstra распределение модуляции интенсивности света по углу будет, очевидно, равно  $\exp(iky + ik\theta x)f(\theta)$ , где  $k = k_1$  или  $k_2$ , а  $f(\theta)$  — распределение интенсивности света перед растром (рис. 50). По мере удаления от раstra тень от него будет все более и более размытой, так как распределение освещенности, пропорциональное  $\int \exp(iky + ik\theta x)f(\theta) d\theta$ , будет из-за размазывания по  $\theta$  приближаться к равномерному. Но если расположить растры параллельно один за другим на расстоянии  $d$  между ними так, чтобы тень от одного раstra падала на другой, то распределение освещенности будет равно

$$\int \exp\{ik_1 y + ik_1 \theta x \pm [ik_2 y + ik_2 \theta (x - d)]\} f(\theta) d\theta. \quad (4.8)$$

Отсюда видно, что на расстоянии  $x = k_2 d / (k_2 - k_1)$  от первого раstra экспонента под интегралом перестает зависеть от  $\theta$ . При этом на экране отчетливо проступает муар на разности волновых чисел  $k_2 - k_1$ . Из выражения для



положения экрана  $x = k_2 d / (k_2 - k_1)$  видно, что эффект возникает только при  $k_2 > k_1$ .

Из рассмотренных примеров ясно, что эффект эха возникает в том случае, когда имеет место затухание линейных возмущений вследствие их «расползания» по фазам. В случае спинового эха макроскопический эффект исчезал из-за накопления разности фаз в разных точках, а в примере с растрами — из-за расползания по оси  $y$

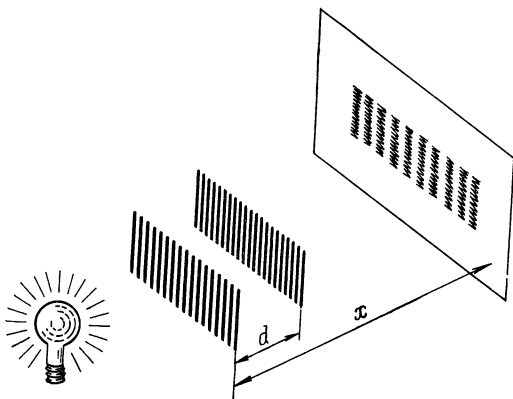


Рис 50. Эхо на рассеянном свете

отдельных пучков света. Но совершенно аналогичный эффект имеет место в случае затухания Ландау: электрическое поле волны затухает со временем из-за «расползания» пучков резонансных частиц по скоростям. Естественно поэтому ожидать эффекта типа эха на плазменных волнах. Но сначала мы познакомимся с циклотронным эхом в плазме, которое больше похоже на спиновое эхо.

3. *Циклотронное эхо в плазме.* Циклотронное эхо в плазме было обнаружено Хиллом и Капланом [127]. Эксперимент ставился следующим образом [127—129]. Поперек столба созданной высокочастотным разрядом распадающейся плазмы, когда ток в ней практически отсутствовал и она была достаточно спокойной, пропускались два импульса высокочастотных колебаний с интервалом времени  $\tau$ . Плазма помещалась в магнитное

поле около 3 кГс, а частота генератора была близка к циклотронной частоте электронов. Амплитуда импульсов была достаточно высокой, так что при циклотронном резонансе электроны могли приобретать энергию, значительно превышающую тепловую. После прохождения

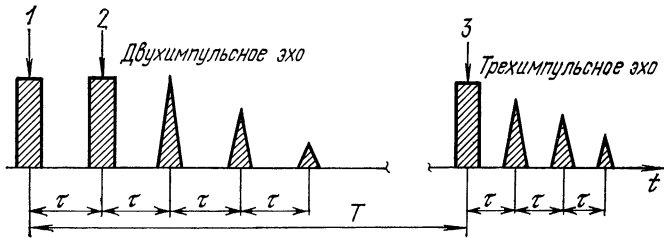


Рис. 51. Циклотронное эхо

двух импульсов от внешнего генератора наблюдались импульсы из плазмы на циклотронной частоте с интервалом времени  $\tau$  (рис. 51).

Кроме такого двухимпульсного эха, авторы наблюдали трехимпульсное эхо, когда третий импульс подавался с большой задержкой  $T$ , значительно превышающей время столкновения электронов с атомами нейтрального газа, но меньшей времени релаксации электронов по энергиям. Как показано на рис. 51, после этого снова наблюдалась серия импульсов из плазмы.

Объяснение механизма циклотронного эха и его основных особенностей было дано Гулдом [130] (см. также [131]). В принципе циклотронное эхо близко к спиновому. Если при ядерном магнитном резонансе действие высокочастотного поля приводит к повороту спинов от оси  $z$ , то при циклотронном резонансе происходит набор энергии электронами. Если продолжительность импульса не слишком велика, то он имеет достаточно широкий спектр, так что даже при наличии некоторой неоднородности магнитного поля можно считать, что все электроны (вначале холодные) приобретают одну и ту же энергию. Пусть в пространстве скоростей  $(v_x, v_y)$ , т. е. в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, положение электронов сразу после первого импульса

отвечает точке  $(v_p, 0)$  (рис. 52, а). В последующие моменты времени электроны будут вращаться с циклотронной частотой, и при наличии малой неоднородности магнитного поля они очень скоро достигнут однородного распределения по фазам в среднем по образцу.

Рассмотрим теперь некоторую группу электронов  $A$ , имеющих одну и ту же фазу перед вторым импульсом

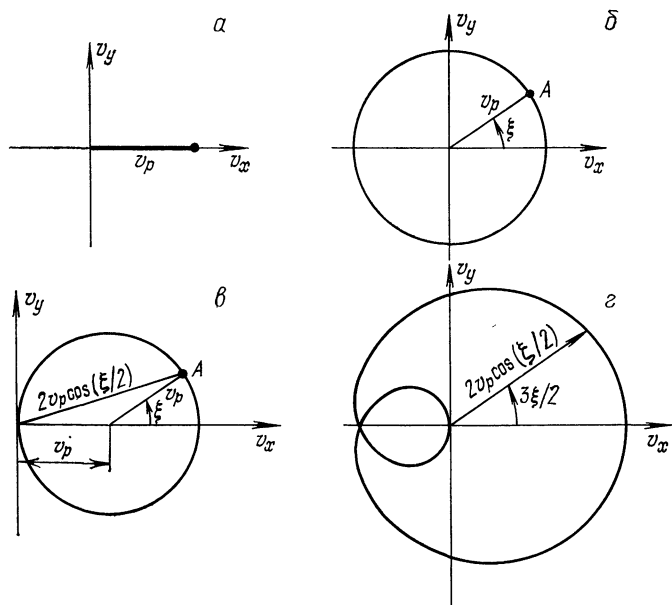


Рис. 52. Распределение электронов по скоростям: а — при двухимпульсном эхе сразу после первого импульса; б — перед вторым импульсом; в — сразу после второго импульса; г — в момент первого эха

(рис. 52, б). Точнее, в эту группу входят все электроны с фазами  $\xi + 2\pi n$ , где  $n$  — целое число. Во время второго импульса электроны набирают или теряют энергию, в зависимости от того, какова их фаза, и действие импульса можно учесть простым сдвигом всей функции распределения на одну и ту же величину  $v_p$ , как и в первом импульсе. Группа  $A$  выделенных нами электронов будет иметь при этом скорость  $2v_p \cos(\xi/2)$ , как видно из рис.

52, в. Так как в эту группу входят электроны из различных точек пространства, которым соответствуют разные циклотронные частоты, со временем частицы этой группы начнут расходиться в пространстве скоростей. Однако, поскольку электроны вращаются с той же угловой скоростью, что и прежде, они будут вновь группироваться через интервалы времени  $\tau$ . Например, через время  $\Delta t = \tau$  после второго импульса, т. е. к первому сигналу эха, частицы этой группы соберутся в точке А с фазой  $3\xi/2$ , а все распределение электронов по скоростям превратится в кривую, изображенную на рис. 52, з.

Это значит, что электроны, совершающие циклотронные колебания, потенциально могут создавать эффект эха. Однако фактически распределение рис. 52, з никакого эха не дает: нетрудно проверить, что при таком распределении суммарный ток, выражающийся через средние значения  $\langle v_x \rangle$ ,  $\langle v_y \rangle$ , равен нулю. Это не удивительно, ведь рассмотренная нами система является линейной — мы просто сложили эффекты от двух импульсов. Эхо же представляет собой существенно нелинейный эффект: суммарный сигнал не представляет суперпозицию откликов на каждый импульс, он определяется двумя импульсами сразу.

Чтобы циклотронное эхо действительно проявилось, в игру должен вступить какой-нибудь нелинейный механизм, который несколько нарушил бы картину рис. 52, з и привел к отсутствию точной компенсации всех токов. Таким нелинейным механизмом может быть, например, зависимость массы от скорости (релятивистский эффект), нелинейность волны и т. д. Но наиболее простым и естественным механизмом является просто зависящая от скорости частота столкновений  $\gamma(v)$ . Столкновения электронов с атомами нейтрального газа или между собой приводят к тому, что часть электронов выбывает из когерентного движения. Если частота столкновений зависит от скорости, то число выбывших из кривой рис. 52, з электронов будет различно в разных точках, и, следовательно, появится макроскопический ток на циклотронной частоте, т. е. возникнет эхо. Экспериментальные данные хорошо согласуются с этим механизмом [134, 137]. Им же объясняется и трехимпульсное эхо.

Как уже отмечалось выше, для трехимпульсного эха к моменту третьего импульса электроны успевают пол-

ностью потерять направленный импульс, но еще не успевают потерять энергию (при упругих столкновениях с атомами нейтрального газа время релаксации энергии в  $m_i/m_e$  раз больше времени релаксации импульса). Это значит, что электроны группы  $A$  на рис. 52 перед третьим импульсом будут распределены равномерно по сфере радиуса  $2v_p \cos(\xi/2)$  (рис. 53,  $a$ ). Сразу после третьего

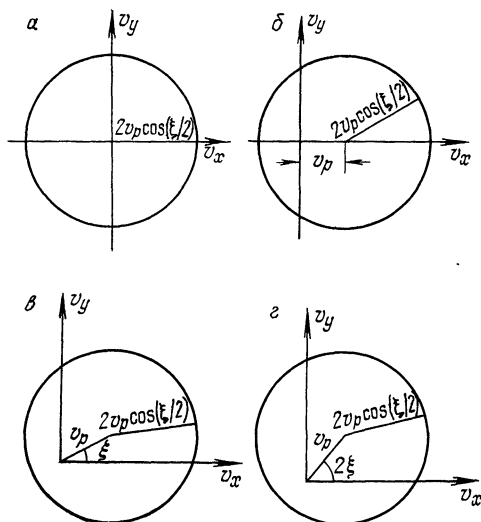


Рис. 53. Распределение электронов по скоростям:  $a$  — при трехимпульсном эхе перед третьим импульсом;  $б$  — сразу после третьего импульса;  $в$  — в момент первого эха;  $г$  — в момент второго эха

импульса эта сфера оказывается сдвинутой на величину  $v_p$  (рис. 53,  $б$ ), а затем электроны этой группы «расползаются» по фазам. Однако через интервалы времени  $\tau$  будет происходить группировка в пространстве скоростей со сдвигом фаз  $\xi$  от импульса к импульсу (рис. 53,  $в$  и  $г$ ). Но опять, чтобы суммарный ток был отличным от нуля, должен действовать механизм зависимости частоты столкновений от скорости. И сам эффект, как нетрудно видеть, достигает максимума, когда частота столкновений становится порядка обратного времени между импульсами  $\tau^{-1}$ . Эти выводы также удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Циклотронное эхо и само по себе представляет большой интерес как новый нелинейный эффект в плазме, но, кроме того, оно может быть использовано для целей

диагностики, в частности для исследования процессов релаксации в плазме.

4. *Эхо на плазменных волнах.* Вернемся теперь к плазменным волнам. Как было показано Гулдом, О'Нилом и Малмбергом [134], в них также может проявляться эффект эха. Рассмотрим сначала более простой случай модулированных пучков Ван-Кампена, распространяющихся в виде плоских волн вдоль оси  $x$ . Такие волны могут возбуждаться в плазме с помощью сетки, на которую подается периодический сигнал. Пусть частота этого сигнала значительно больше плазменной частоты  $\omega_{pe}$ . Тогда диэлектрическую проницаемость плазмы  $\epsilon$  можно считать равной единице, т. е. поляризацией среды в волнах можно пренебречь. В этих условиях возмущение функции распределения электронов, прошедших через сетку, просто равно

$$f_1(x, v, t) = f_1(v) \exp\left(-i\omega_1 t + i\omega_1 \frac{x}{v}\right), \quad (4.9)$$

где  $f_1(v)$  — амплитуда возмущения функции распределения вблизи сетки. Вид возмущения (4.9) следует из того, что вдали от сетки  $f_1$  должно удовлетворять уравнению свободного движения частиц

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0. \quad (4.10)$$

Функцию распределения (4.9) можно рассматривать как набор модулированных пучков. Вблизи сетки все эти пучки колеблются в фазе, но по мере удаления от нее фазы пучков с разными скоростями сильно различаются, поэтому плотность заряда

$$\rho = -e \int f_1 dv \quad (4.11)$$

должна быстро уменьшаться при увеличении  $x$  ( $f_1$  становится быстро осциллирующей функцией  $v$ ). Это значит, что колебания электрического потенциала должны быстро убывать при удалении от сетки, и этот эффект вполне аналогичен расфазировке магнитных моментов перед вторым импульсом при наблюдении спинового эха.

Допустим теперь, что на расстоянии  $d$  от первой сетки расположена вторая, на которую подается переменный потенциал с частотой  $\omega_2$ , также большей  $\omega_{pe}$ . Тогда от второй сетки также побегут волны Ван-Кампена, возни-

кающие вследствие возмущения  $f$ . Но, кроме того, вторая сетка будет модулировать функцию (4.9), так что появится нелинейный отклик  $f_2$  на комбинационной частоте:

$$f_2(x, v, t) = f_2(v) \exp \left[ -i \omega_1 \left( t - \frac{x}{v} \right) \pm i \omega_2 \left( t - \frac{x-d}{v} \right) \right]. \quad (4.12)$$

При  $x = d \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$  экспонента, отвечающая частоте

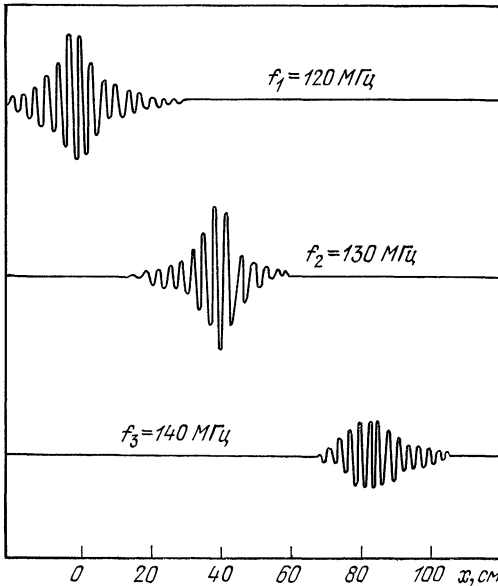


Рис 54. Эхо в плазме третьего порядка (т. е.  $2f_2 - f_1 = f_3$ ) [136]

$\omega_1 - \omega_2$ , перестанет зависеть от  $v$ . Это значит, что в точке

$$x = d + \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} d = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} d \quad (4.13)$$

должны наблюдаться заметные колебания плотности заряда на частоте  $\omega' = \omega_1 - \omega_2$ . Другими словами, электрический зонд, помещенный в эту точку, должен обнаружить эхо на комбинационной частоте. Именно такой отклик и наблюдается экспериментально (рис. 54).

Этот вывод сохраняется и в том случае, когда  $\omega \sim \omega_{pe}$ , поскольку он связан с рассмотрением поведения только резонансных частиц. Меняется лишь количественная формулировка эффекта эха, поскольку, кроме возмущения резонансных частиц, приходится учитывать возмущение остальных электронов, и соответственно в выражение для отклика второго порядка войдет  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость плазмы. Аналогичным образом можно рассмотреть временное эхо, эхо на ионно-звуковых волнах, на поперечных волнах и т. д. Кроме эха второго порядка, существуют также эффекты плазменного эха высших порядков.

Предсказанный теоретически эффект эха на плазменных волнах вначале наблюдался Малмбергом, Уортоном, Гулдом и О'Нилом [136] на электронных колебаниях, а затем он изучался теоретически и экспериментально для разнообразных типов волн в плазме [137—142]. Эффекты эха показывают, что бесстолкновительное затухание волн в плазме по существу представляет собой обратимый процесс, связанный с «расползанием» резонансных частиц по фазам и с соответствующим уменьшением когерентного вклада в возмущение электрического поля.

### § 3. Рассеяние волн на частицах

При рассмотрении нелинейного затухания Ландау мы ограничились одной гармонической волной конечной амплитуды. Более сложная картина имеет место в том случае, когда в плазме одновременно может быть несколько волн. Например, две распространяющиеся в одну сторону волны при близких фазовых скоростях могут обмениваться захваченными частицами, и тем самым между ними будет осуществляться довольно сложное косвенное взаимодействие.

Но если волны не параллельны, то такое взаимодействие отсутствует или сильно ослаблено. Разумеется, оно также очень мало, если обе волны имеют большие фазовые скорости и захваченных частиц очень мало. Однако и в этом случае может происходить взаимодействие волн конечной амплитуды через резонансные частицы, но не на прямом резонансе  $\omega - kv = 0$ , а на комбинационном.



Поясним, в чем тут дело. Как мы видели ранее, при сложении двух слабо нелинейных волн  $\mathbf{k}$ ,  $\omega_{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k}'$ ,  $\omega_{\mathbf{k}'}$  из-за нелинейных членов возникают биения на комбинационных волновых числах и частотах  $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}'$ ,  $\omega_{\mathbf{k}} \pm \omega_{\mathbf{k}'}$ . Например, при близких волновых векторах  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  волна  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  соответствует муару на рис. 37. Даже в том случае, когда в плазме не может распространяться собственная волна с частотой  $\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}$  и волновым вектором  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  (и соответственно со знаком плюс), т. е. распад волн запрещен законами сохранения энергии и импульса, вынужденные колебания с  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ ,  $\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}$  будут все же присутствовать. Эти колебания также могут взаимодействовать с резонансными частицами, скорость которых совпадает с фазовой скоростью комбинационной волны, т. е.

$$\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{v} = 0 \quad (4.14)$$

(для определенности мы выбрали здесь знак минус, знаку плюс соответствует просто волна с  $-\mathbf{k}'$ ,  $-\omega_{\mathbf{k}'}$ ).

Так как амплитуда вынужденных колебаний для слабо нелинейных волн, вообще говоря, мала, то соответствующее взаимодействие частиц с этим колебанием должно быть аналогично линейному затуханию Ландау. Другими словами, при отрицательной производной  $df/dv$  в точке резонанса частицы должны отбирать энергию у комбинационной волны. Но амплитуда этой волны просто пропорциональна произведению амплитуд исходных волн  $a_{\mathbf{k}}$  и  $a_{\mathbf{k}'}$ . Поэтому изменить амплитуду комбинационной волны можно только путем изменения амплитуд, т. е. числа исходных волн  $N_{\mathbf{k}}$ ,  $N_{\mathbf{k}'}$ .

Но этим волнам, как мы знаем, соответствуют суммарная энергия  $\mathcal{E} = \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}'}$  (частоты считаются положительными) и импульс  $\mathbf{P} = \mathbf{k} N_{\mathbf{k}} + \mathbf{k}' N_{\mathbf{k}'}$ . При взаимодействии с резонансными частицами часть энергии и импульса волн должна передаваться частицам. При этом импульс частицам передается только в направлении движения комбинационной волны, вдоль которого на частицы действует резонансное поле волны. Таким образом, поперечная по отношению к вектору  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  компонента импульса волн должна сохраняться, т. е.

$$[\mathbf{k} - \mathbf{k}', \delta \mathbf{P}] = [\mathbf{k} \mathbf{k}'] \delta N_{\mathbf{k}} + [\mathbf{k} \mathbf{k}'] \delta N_{\mathbf{k}'} = 0. \quad (4.15)$$

Отсюда видно, что  $\delta(N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}'}) = 0$ , т. е.

$$N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}'} = \text{const.} \quad (4.16)$$

Это означает, что мы фактически имеем дело с рассеянием волн на частицах: при уменьшении числа волн одного направления на столько же увеличивается число волн другого направления. Поскольку при этом изменение энергии равно

$$\delta \mathcal{E} = \omega_k \delta N_k + \omega_{k'} \delta N_{k'} = (\omega_k - \omega_{k'}) \delta N_k, \quad (4.17)$$

то видно, что при передаче энергии от волн частицам, т. е. при отрицательной производной  $\partial f / \partial v$  для резонансных частиц, рассеяние идет в сторону уменьшения частоты: число волн с большей частотой убывает, а с меньшей — возрастает.

Наряду с распадом волн их индуцированное рассеяние на резонансных частицах составляет один из двух основных механизмов взаимодействия слабо нелинейных волн в плазме.

## ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПЛАЗМЫ

## § 1. Неустойчивость плазмы

1. *Неустойчивость и турбулентность.* Всюду выше при рассмотрении нелинейных процессов в плазме мы предполагали, что эти процессы являются вполне регулярными и, стало быть, точно воспроизводимыми. Но, к сожалению, в плазме не все явления могут быть точно воспроизведены. Очень часто при одних и тех же внешних условиях в ней самопроизвольно возбуждаются колебания и шумы, т. е. проявляется неустойчивость плазмы.

Ситуация здесь опять сходна с тем, что имеет место в жидкости. Как хорошо известно, при малых скоростях, т. е. при малых числах Рейнольдса, течения в жидкости являются ламинарными. Однако при больших числах Рейнольдса, когда роль диссипации из-за вязкости становится малой, потоки жидкости становятся турбулентными, в них самопроизвольно развивается сложный процесс возбуждения, взаимодействия и трансформации вихрей.

В плазме, особенно в разреженной, диссипация из-за столкновений также является незначительной, и поэтому в ней легко создаются условия для нарастания малых возмущений и соответственно для развития сложного хаотического движения. Любое состояние плазмы с сильно развитыми шумами и колебаниями принято называть турбулентным.

В отличие от жидкости, в плазме могут осуществляться и даже присутствовать одновременно многие типы турбулентных состояний. Это связано с тем, что у плазмы гораздо богаче спектр возможных течений и колебаний. Соответственно можно говорить об отдельных типах турбулентности плазмы (например, о ленгмюровской турбулентности, если в основном возбуждаются ленгмюровские колебания, ионно-звуковой турбулентности и т. п.). Как правило, эти турбулентные состояния возникают вследствие развития соответствующих не-

устойчивостей. Отсюда видно, как следует продвигаться в понимании турбулентных явлений в плазме: сначала следует проанализировать все возможные механизмы неустойчивостей плазмы, т.е. нарастания малых ее возмущений, классифицировать эти неустойчивости, а затем исследовать возможные нелинейные механизмы либо ограничения эти неустойчивостей, либо их развития в турбулентные процессы.

При классификации неустойчивостей удобно использовать тот же набор упрощенных теоретических моделей, который обсуждался нами ранее при рассмотрении колебаний плазмы. Так, в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики мы получаем широкий класс магнитогидродинамических (МГД), или гидромагнитных, неустойчивостей. Это наиболее опасный тип неустойчивостей для магнитного удержания плазмы, потому что он связан с макроскопическими перемещениями больших участков плазмы как целого.

В зависимости от того, учитывается ли конечная проводимость плазмы или считается бесконечной, можно говорить о диссипативных или идеальных неустойчивостях этого типа.

Для другого класса очень медленных перемещений плазмы со скоростями, сравнимыми со скоростями дрейфового движения заряженных частиц, необходимо, как мы знаем, использовать двухжидкостную гидродинамику. Соответствующие очень медленные неустойчивости называются дрейфовыми.

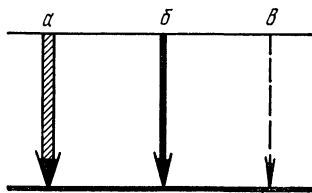
Далее, в плазме могут раскачиваться такие колебания и волны, для которых является существенным взаимодействием с отдельными группами резонансных частиц. Такие неустойчивости называются кинетическими. Легче всего кинетические неустойчивости развиваются при взаимодействии с плазмой пучков заряженных частиц, и этот подкласс неустойчивостей имеет свое наименование пучково-плазменных неустойчивостей. Впрочем, кинетические неустойчивости могут развиваться и в отсутствие выделенных групп частиц типа пучков. Например, при магнитном удержании плазмы в адиабатических ловушках такого рода неустойчивости на различных ветвях развиваются из-за того, что функция распределения частиц по поперечным скоростям соответствует инверсной заселенности энергетических уровней. В тороидальных системах магнитного удержания плазмы

кинетические неустойчивости могут развиваться на дрейфовых волнах или из-за присутствия выделенных групп частиц, например частиц, запертых в локальных магнитных зеркалах, возникающих вследствие неоднородностей магнитного поля.

Наконец, при прохождении через плазму сильных электромагнитных волн причиной раскачки малых возмущений могут быть колебания заряженных частиц в волнах. При этом могут развиваться различного рода параметрические неустойчивости плазмы.

Ниже мы очень кратко познакомимся со всеми перечисленными неустойчивостями. Сначала заметим, что в реальных условиях часто могут одновременно развиваться и играть определенную роль сразу несколько различных типов неустойчивостей. Иногда между ними возникает своего рода «соревнование». Рассмотрим, например, разреженную высокотемпературную плазму, удерживаемую в тороидальной магнитной ловушке. Можно сказать, что такая плазма находится в крайне неравновесном «метастабильном» состоянии. Неудивительно, что в этом состоянии она будет «искать» возможные «каналы» для распада, т. е. для выброса на стенку (рис. 55). Наиболее быстрый распад происходит при

Рис. 55. Схема распада «метастабильного» состояния плазмы при магнитогидродинамической (*a*), диссипативной (*b*) и дрейфовой (*в*) неустойчивостях



развитии идеальной МГД-неустойчивости, когда выброс плазмы на стенку может происходить отдельными макроскопическими сгустками. Если МГД-неустойчивость стабилизирована, то может проявиться более слабая диссипативная неустойчивость, а стабилизация последней может дать возможность проявиться еще более слабой дрейфовой неустойчивости и т. д. Поэтому, в принципе, могут осуществляться условия для проявления самых слабых неустойчивостей. Естественно начать с изучения наиболее сильных из них.

2. *Гидромагнитные неустойчивости.* Идеальные гидромагнитные неустойчивости проявляются в условиях,

когда плазма неустойчива по отношению к быстрым (так что не успевает сыграть роль конечная проводимость) перемещениям макроскопических участков плазмы как целого. Для описания таких перемещений вполне пригодно приближение одножидкостной магнитной гидродинамики. В этом приближении плазма предполагается термически равновесной с максвелловским распределением частиц по скоростям. Причиной неустойчивости плазмы в этом случае в конечном счете служит наличие электрических токов, а в качестве энергетического резервуара для раскачки колебаний может служить либо неоднородность давления плазмы, либо неоднородность магнитного поля, либо обе они вместе взятые. Удобно проанализировать эти причины порознь. При этом целесообразно ограничиться случаем плазмы низкого давления, когда  $\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$ .

а) Желобковая неустойчивость. Неоднородность давления плазмы может приводить к так называемой желобковой неустойчивости [157, 158]. В наиболее чистом виде она проявляется в ловушках с замкнутыми силовыми линиями (например, с гофрированным полем). Рассмотрим в такой ловушке отдельную замкнутую трубку, образованную силовыми линиями магнитного поля и заполненную плазмой с  $\beta \ll 1$ . Так как плазма стремится расшириться, то эта трубка выталкивается в сторону, где она увеличивает свой объем.

Однако движение трубки в сильном магнитном поле не является свободным: всякое заметное ее искривление связано с большим увеличением магнитной энергии и поэтому недопустимо. Возможным является лишь такое перемещение трубки, при котором магнитное поле остается неизменным, т. е. магнитное поле в том месте, куда пришла трубка, должно остаться практически таким же, что и до ее прихода.

Объем силовой трубки равен  $V = \oint S dl$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения трубки, а интеграл берется вдоль силовой линии. Но  $SB = \Phi$  есть магнитный поток этой трубки, который остается постоянным как вдоль трубки, так и во времени вследствие вмороженности магнитного поля в идеальную плазму. Поэтому  $V = \oint \frac{d\Phi}{B}$ , и, следовательно, трубка с плазмой стремится

ся двигаться в направлении увеличения  $U = \oint \frac{dl}{B}$ . Можно сказать, что трубка с плазмой обладает потенциальной энергией  $-pU$  и стремится двигаться в сторону больших  $U$ . По аналогии с неоднородной жидкостью в поле тяжести отсюда можно заключить, что плазма будет находиться в равновесии только в том случае, если ее давление будет постоянным на поверхности постоянного значения  $U$ , т.е.  $p = p(U)$ . Это соотношение мы получили в § 3 гл. 1, исходя из несколько иных соображений.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости такого равновесия. Пусть некоторая трубка с плазмой смещается на малое расстояние, раздвигая остальные трубки. Если это смещение имеет вид желобка, т.е. происходит без искривления трубки, то относительное изменение объема трубки равно  $\delta V/V = \delta U/U$ , а изменение давления вследствие адиабатического расширения  $dp = -\gamma p \delta U/U$ . Давление же в трубках, окружающих рассматриваемую смещенную трубку, равно  $p(U + \delta U) = p + (dp/dU)\delta U$ . Если смещение происходит в сторону возрастания  $U$ , а давление в смещенной трубке окажется больше, чем давление окружающей ее плазмы, то трубка будет всплывать дальше, и такое распределение плазмы неустойчиво. Если же, наоборот, давление в трубке окажется меньше, т.е.  $-\gamma p \delta U/U < (dp/dU)\delta U$ , то трубка будет вытесняться обратно в сторону равновесия, и плазма будет устойчивой. Таким образом, в магнитной ловушке с замкнутыми силовыми линиями должно выполняться следующее условие устойчивости:

$$\frac{dp}{dU} > -\frac{\gamma p}{U}. \quad (5.1)$$

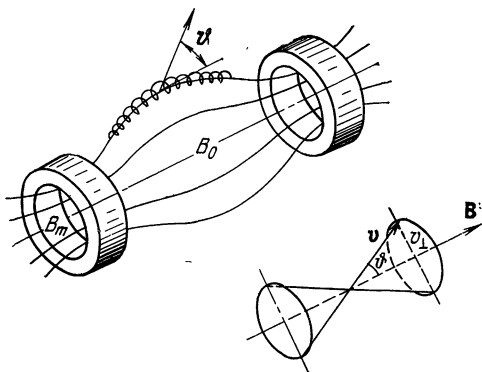
Это условие сходно с условием конвективной устойчивости неоднородного сжимаемого газа в поле тяжести. На границе плазмы  $dp/dU$  очень велико, так что правой частью в (5.1) можно пренебречь, и при этом для устойчивости нужно, чтобы плазма была расположена в области с большим значением  $U = \oint \frac{dl}{B}$ .

Так как эта область соответствует меньшим магнитным полям, то ее можно назвать «магнитной ямой». Таким

образом, для желобковой устойчивости плазмы достаточно, чтобы плазма располагалась в магнитной яме.

Наиболее простой и важный пример ловушки, в которой существенную роль играет желобковая неустойчивость, представляет ловушка с магнитными пробками (или зеркальная ловушка). В простейшем варианте такая ловушка создается двумя одинаковыми коаксиальными катушками, включенными в одном направлении (рис. 56). При этом магнитное поле между катушка-

Рис. 56. Магнитное поле адиабатической ловушки и движение заряженной частицы



ми несколько слабее, чем в плоскости катушек, так что центральная часть поля оказывается заключенной между двумя магнитными «пробками», или «зеркалами», — областями с усиленным полем. Отношение поля в пробках  $B_m$  к полю в центральной части ловушки  $B_0$  принято называть пробочным (зеркальным) отношением:  $\alpha = B_m/B_0$ .

Если электрическое поле отсутствует, то при движении заряженной частицы в магнитном поле ее скорость  $v$  остается постоянной (сила Лоренца, будучи перпендикулярна  $\mathbf{v}$ , работы не совершает). Кроме того, в сильном магнитном поле, когда ларморовский радиус  $\rho = v_{\perp}/\Omega$  ( $v_{\perp}$  — поперечная по отношению к  $\mathbf{B}$  компонента скорости,  $\Omega = eB/mc$  — ларморовская частота) значительно меньше характерной длины изменения магнитного поля, сохраняется также величина

$$\mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2 B}. \quad (5.2)$$



Эта величина, имеющая смысл магнитного момента ларморовского кружка, представляет собой адиабатический инвариант квазипериодического движения.

Поскольку  $\mu = \text{const}$ , при приближении заряженной частицы к пробке поперечная компонента скорости  $v_{\perp}$  возрастает, а так как  $v = \text{const}$ , то при этом продольная компонента скорости убывает и при достаточно большом  $\alpha$  может обратиться в нуль. В этом случае частица отразится от магнитной пробки.

Введем в рассмотрение угол  $\vartheta$ , составляемый вектором скорости с направлением магнитного поля  $B$ . Он равен  $\pi/2 - \psi$ , где  $\psi$  — так называемый шаговый или питч-угол. Нетрудно видеть, что магнитная пробка отражает только те частицы, для которых в центральной части ловушки

$$\sin \vartheta > \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{B_0}{B_m}}. \quad (5.3)$$

Все частицы с углом  $\vartheta < \vartheta_0 = \arcsin(B_0/B_m)^{1/2}$  попадают в «запрещенный конус» направлений и вылетают из ловушки. Таким образом, адиабатическая ловушка удерживает не все частицы, а лишь те, которые находятся внутри разрешенного конуса направлений.

В силу этого плазма в адиабатической ловушке всегда анизотропна: давление вдоль магнитного поля в ней не равно поперечному давлению. Однако это обстоятельство не является существенным для желобковой неустойчивости. Для этой неустойчивости важно, в какую сторону — наружу или внутрь плазмы — убывает магнитное поле.

Рассмотрим опять отдельную силовую трубку  $l$  в ловушке (рис. 57). В основной части этой трубки силовые линии магнитного поля выгнуты наружу и магнитное поле убывает наружу. Вследствие этого величина  $U$  возрастает к периферии, и на трубку действует выталкивающая сила в радиальном направлении  $F = n(T_i + T_e)/R$ , где  $R$  — средний радиус кривизны силовых линий данной трубки. Под действием этой силы трубка с плотной плазмой должна выбрасываться в радиальном направлении с ускорением  $g_0 = (T_i + T_e)/m_i R$ .

Однако при не очень большой плотности плазмы (что для адиабатических ловушек не редкость) процесс выталкивания плазмы должен замедляться. В самом деле,

рассмотрим движение трубки  $I$  с точки зрения двухжидкостной магнитной гидродинамики. При этом можно рассуждать следующим образом. На каждую из компо-

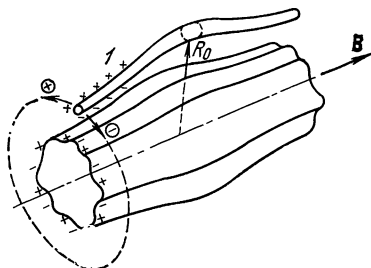


Рис. 57. Желобковые возмущения плазмы в зеркальной адиабатической ловушке

нент плазмы в радиальном направлении действует сила  $nT_j/R$ . Под действием этой силы частицы начинают дрейфовать в азимутальном направлении, причем противоположно заряженные частицы дрейфуют в разные стороны. Вследствие этого происходит поляризация зарядов в трубке, как показано на рис. 57. Под действием появившегося азимутального электрического поля начинается совместный дрейф частиц по радиусу, который и приводит к выбросу трубки с плазмой.

Введем локальную систему координат с осью  $x$  в радиальном и осью  $y$  в азимутальном направлении (в дальнейшем мы не раз будем пользоваться такой системой, более удобной для приближенного количественного рассмотрения). Тогда с учетом того, что электрическое поле имеет только  $y$ -компоненту и что инерцией электронов и  $y$ -компонентой инерциального члена для ионов можно пренебречь, запишем уравнения в форме

$$m_i \frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{c} v_{iy} B + \frac{T_i}{R}, \quad (5.4)$$

$$0 = -\frac{e}{c} v_x B + eE, \quad (5.5)$$

$$0 = -\frac{e}{c} v_{ey} B + \frac{T_e}{R}. \quad (5.6)$$

Здесь мы приняли во внимание, что в радиальном направлении плазменная трубка движется как целое, т. е. уравнение (5.5) справедливо как для ионной, так и для электронной компонент плазмы, и  $v_{ix} = v_{ex} = v_x$ . Элек-

трическое поле  $E$  возникает из-за поляризации трубки. Не гонясь за большой точностью, мы можем принять для  $E$  приближенное значение, как в случае плоского конденсатора:  $E = -4\pi\sigma$ , где  $\sigma = en(\xi_{iy} - \xi_{ey})$  — поверхностная плотность заряда,  $\xi_{iy}$ ,  $\xi_{ey}$  — азимутальные смещения ионов и электронов. (Принимая приближенное значение для  $E$ , мы просто пренебрегаем соответствующим фактором.) Таким образом, для электрического поля получаем соотношение

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi en(v_{iy} - v_{ey}) = -\frac{4\pi cm_i n}{B} \left( \frac{dv_x}{dt} - g_0 \right). \quad (5.7)$$

Мы воспользовались здесь уравнениями (5.4), (5.6) и опять ввели обозначение  $g_0 = (T_i + T_e)/m_i R$ . Выражая  $E$  с помощью (5.5) через  $v_x$ , получим

$$\frac{dv_x}{dt} = g = g_0 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2}, \quad (5.8)$$

где  $\omega_{pi}$  — плазменная ионная, а  $\Omega_i$  — ионная циклотронная частота. Отсюда видно, что при  $\omega_{pi} < \Omega_i$  процесс выталкивания плазменной трубки из ловушки замедляется.

Тот же процесс поляризации и движения плазмы в радиальном направлении происходит и при развитии желобковой неустойчивости, когда на поверхности плазмы образуются желобки вдоль силовых линий (см. рис. 57). Малые возмущения такого типа нарастают, как можно показать, с инкрементом  $\gamma \sim \sqrt{g/a}$ , где  $a$  — поперечный размер плазменного сгустка. Вследствие неустойчивости на поверхности плазмы должны образовываться вытянутые вдоль силовых линий желобки и «языки». Затем эти «языки» выбрасываются в радиальном направлении.

б) «Магнитная яма». Наиболее радикальным способом борьбы с желобковой неустойчивостью является создание такой магнитной конфигурации, при которой магнитное поле имело бы минимум (отличный от нулевого значения) и нарастало бы во все стороны. Такие конфигурации получили название ловушек с «минимумом  $B$ » или с «магнитной ямой».

Впервые стабилизация желобковой неустойчивости с помощью магнитной ямы была получена М. С. Иоффе с сотрудниками [159—162]. Ими была использована про-

стейшая комбинированная система, в которой к обычным круглым катушкам, создающим магнитную ловушку типа изображенной на рис. 56, добавляется так называемая стабилизирующая обмотка, представляющая собой систему линейных проводников, расположенных вдоль силовых линий основного поля, как это показано на рис. 58. Токи в соседних проводниках направлены во взаимно противоположных направлениях. Магнитное поле стабилизирующей обмотки  $B_{\perp}$  равно нулю на оси ловушки и монотонно нарастает по радиусу. Поэтому, пропуская через обмотку ток достаточной величины, можно скомпенсировать радиальный спад основного поля и сделать суммарное поле нарастающим от центральной области ловушки к периферии.

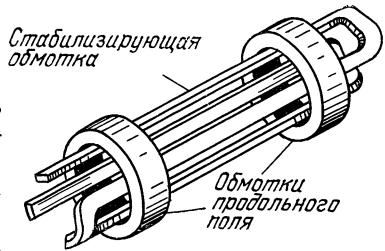


Рис. 58. Комбинированная ловушка с «магнитной ямой»

Силовые линии суммарного поля имеют довольно сложную структуру. Только узкий пучок приосевых силовых линий проходит вдоль всей ловушки, не достигая боковых стенок. Линии, отстоящие дальше от оси в центральном сечении ловушки, пересекают стенку в местах зазоров между проводниками стабилизирующей обмотки. Тем не менее эта конфигурация представляет собой типичную адиабатическую ловушку и притом с минимумом магнитного поля внутри объема, занятого плазмой (этот минимум не обязательно должен находиться на оси ловушки).

Позднее различными авторами был предложен целый ряд конфигураций с «минимумом  $B$ » (рис. 59). Как оказалось, все они содержат в качестве «конструктивного элемента», или «кирпичика», зеркальную ловушку с квадрупольным поперечным полем (рис. 59,а). Нетрудно понять, почему это так. Для этого рассмотрим вопрос, при каких условиях можно достичь минимума магнитного поля (по абсолютной величине) в некоторой точке. Пусть эта точка совпадает с началом координат и пусть магнитное поле в ней  $B = B_0$  направлено вдоль оси  $z$ . Поскольку вблизи искривленной силовой линии магнитное поле изменяется линейно в поперечном направлении,

то для того чтобы точка  $r=0$  была минимумом  $B$ , требуется, чтобы осевая силовая линия была прямой (точнее, ее кривизна в точке  $r=0$  должна быть равна нулю). В этом случае в разложении скалярного потенциала для

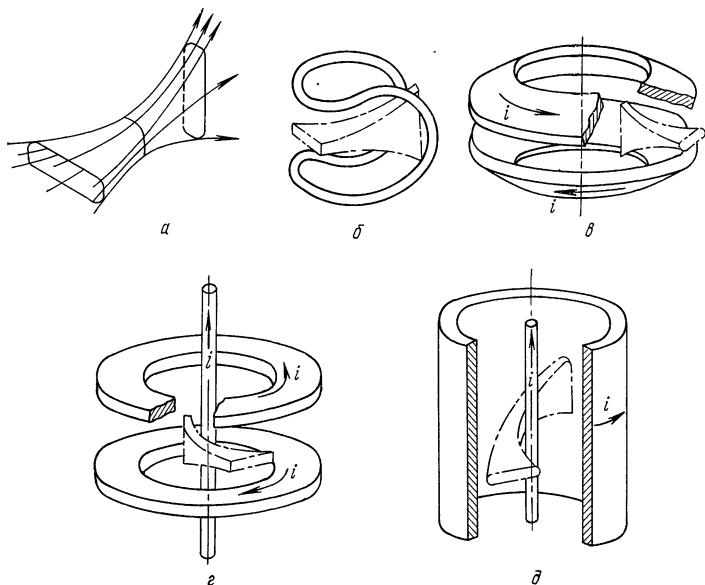


Рис. 59. Различные виды магнитных конфигураций с «минимумом  $B$ »: *а* — «квадрупольный элемент», *б* — «бейсбол», *в* — конфигурация Андреолетти, *г* — остроугольная геометрия с осевым током, *д* — геликоидальная конфигурация

магнитного поля ( $B = \nabla \psi$ ) должны отсутствовать линейные по  $x$  и  $y$  члены, так что

$$\psi = B_0 z + \frac{b}{2}(x^2 - y^2) + a z \left( \frac{z^2}{3} - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \dots \quad (5.9)$$

Мы учли в этом разложении, что  $\Delta \psi = \text{div } \mathbf{B} = 0$ , и допустили, что оси  $x$ ,  $y$  повернуты так, что последний квадрупольный член имеет диагональный вид. Все остальные члены в (5.9) имеют более высокий порядок по  $x$ ,  $y$  и поэтому могут быть отброшены. Из (5.9) следует, что вблизи  $r=0$  магнитное поле имеет вид

$$B = B_0 + a z^2 + \left( \frac{b^2}{B_0} - a \right) \frac{x^2 + y^2}{2} + \dots, \quad (5.10)$$

где точки заменяют члены более высокого порядка малости. Отсюда видно, что наложение магнитных пробок, т. е. усиление поля вдоль  $z$  ( $a > 0$ ), автоматически приводит к его ослаблению в радиальном направлении, но это может быть скомпенсировано достаточно сильным квадрупольным полем ( $b^2 > aB_0$ ).

Отметим, что цикл работ Иоффе по подавлению желобковой неустойчивости в адиабатических ловушках полями с «минимумом  $B$ » (часто такие конфигурации поля называют «магнитной ямой») явился определенным этапом в исследованиях по физике высокотемпературной плазмы. Это была первая убедительная демонстрация возможности стабилизации магнитогидродинамической неустойчивости плазмы. Принцип «минимума  $B$ » был перенесен на тороидальные системы. Различными авторами было предложено много тороидальных систем, обладающих минимумом магнитного поля в среднем (точнее, максимумом интеграла вдоль силовых линий  $\int \frac{dl}{B}$ , который определяет свойства гидродинамической устойчивости тороидальной плазмы).

в) Винтовая неустойчивость. В желобковой неустойчивости освобождалась только энергия плазмы — магнитное поле в ловушке считалось фиксированным, что верно при  $\beta \ll 1$ .

Рассмотрим теперь пример неустойчивости, в которой энергетическим резервуаром для раскачки служит энергия магнитного поля. Такая ситуация осуществляется при протекании сильного электрического тока по плазменному шнуру.

Более удобно начать это рассмотрение с крайне упрощенной модели, которая проясняет суть дела. Пусть идеально проводящий цилиндрический шнур из несжимаемой жидкости помещен в продольное магнитное поле и по нему протекает ток  $I$  в продольном направлении. Мы будем считать, что ток течет по поверхности и что продольное поле внутрь него не проникает (т. е. оно экранировано азимутальным током, текущим по поверхности проводника). Магнитное поле снаружи от проводника имеет вид, показанный на рис. 60, т. е. оно является суперпозицией продольного  $B_0$  и азимутального  $B_\theta = 2I/cr$  полей. Силовые линии являются винтовыми с шагом  $l = 2\pi r B_0 / B_\theta$ . На границе шнура ра-

диуса  $a$  шаг  $l = l_a = \pi c a^2 B_0 / I$ , а при удалении в радиальном направлении он возрастает как  $r^2$ .

Будем для простоты считать, что продольное поле  $B_0$  значительно больше азимутального  $B_\theta$ . Кроме того, имитируя тороидальный шнур радиуса  $R$ , мы будем считать шнур ограниченным, т. е. имеющим длину  $L = 2\pi R$ ,

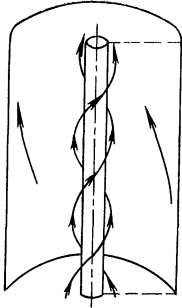


Рис. 60. Проводящий шнур с током в продольном магнитном поле

и все возмущения примем периодическими с периодом  $L$ . Наконец, для упрощения рассуждений будем считать, что шнур окружен идеально проводящим кожухом радиуса  $b \gg a$ , так что потоки магнитного поля между шнуром и кожухом заданы и остаются постоянными (что это означает, мы увидим ниже).

Предположим, что на такой шнур наложено некоторое малое винтовое возмущение вида  $\exp(im\theta + ikz)$ , где  $k = 2\pi n/L = n/R$ ,  $m$ ,  $n$  — целые числа. Пусть  $\xi$  — смещение жидкого элемента, так что  $\partial \xi / \partial t = v$ . Тогда для несжимаемой жидкости имеем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla p, \quad (5.11)$$

где  $\rho_0$  — плотность жидкости, которую мы считаем постоянной,  $p$  — давление. В силу несжимаемости,  $\operatorname{div} \xi = 0$ , из (5.11) имеем

$$\Delta p = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) + \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) p = 0. \quad (5.12)$$

Отсюда при  $kr \ll 1$  получаем  $p = p_0 (r/a)^m$ , где  $p_0$  — значение возмущенного давления на границе шнура, которое должно равняться возмущению давления магнитного поля снаружи от плазмы. Последняя величина, очевидно, равна

$$\xi \frac{d}{dr} \left( \frac{B_0^2 + B_\theta^2}{8\pi} \right) + \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}'}{4\pi} = p_0, \quad (5.13)$$

где  $B'$  — возмущение магнитного поля,  $\xi$  — радиальное смещение границы плазмы. Для колебаний вида  $\exp(-i\omega t)$  это смещение согласно (5.11) с учетом зависимости  $p \sim r^m$  равно

$$\xi = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \left( \frac{dp}{dr} \right)_{r=a-0} = \frac{\rho_0 m}{\rho_0 \omega^2 a}. \quad (5.14)$$

Возмущение магнитного поля  $\mathbf{B}'$  снаружи от шнура можно найти из следующих соображений. Во-первых, поскольку в вакууме  $\operatorname{rot} \mathbf{B}' = 0$ , т. е.  $\mathbf{B}' = \nabla \psi$ , и  $\operatorname{div} \mathbf{B}' = \Delta \psi = 0$ , то для длинноволновых возмущений вдоль шнура, т. е. для  $ka \ll 1$ , опять имеем степенные решения. При  $b/a \gg 1$  можно считать  $\psi = C(a/r)^m$ , где  $C$  — некоторая константа. На границе плазмы магнитное поле должно иметь только тангенциальную компоненту, т. е. в линейном приближении

$$\mathbf{n} \mathbf{B} = B'_r + (\mathbf{B}_0 \nabla) \xi = 0,$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности. Отсюда находим

$$\frac{mC}{a} = i \xi \left( k B_0 + \frac{m}{a} B_\theta \right), \quad (5.15)$$

где  $B_\theta$  — азимутальное поле на границе шнура. Теперь мы можем выразить  $\mathbf{B} \mathbf{B}'$  на границе шнура через  $C$ , т. е.

$$\mathbf{B} \mathbf{B}' = \mathbf{B} \nabla \psi = i \left( k B_0 + \frac{m}{a} B_\theta \right) C.$$

Затем, выражая  $C$  через  $\xi$  и с помощью (5.14)  $\rho_0$  — через  $\xi$ , мы, учитывая (5.13), находим дисперсионное уравнение для частоты малых колебаний:

$$4\pi \rho_0 \omega^2 = \left( k B_0 + \frac{m}{a} B_\theta \right)^2 - \frac{m B_\theta^2}{a^2}. \quad (5.16)$$

Отрицательным значениям квадрата частоты соответствует неустойчивость. Как мы видим, инкремент нарастания малых колебаний  $\gamma = -i\omega$  достигает максимума при  $ka = -mB_\theta/B_0$ . Такое возмущение является винтовым и имеет шаг  $2\pi m/k = 2\pi a B_0/B_\theta$  вдоль шнура. Таким образом, шаг наиболее неустойчивого возмущения совпадает с шагом силовой линии на границе шнура.



При винтовой неустойчивости жидкость, будучи несжимаемой, сама работы не производит — неустойчивость развивается за счет освобождения магнитной энергии. Это становится видно еще более отчетливо, если мы не будем ограничиваться малыми возмущениями, а рассмотрим винтовую деформацию конечной амплитуды. Нетрудно видеть, что винтовая неустойчивость развивается в силу того, что винтовые силовые линии на рис. 60 стремятся сократиться и поэтому деформируют проводящий шнур таким образом, чтобы уменьшить свою кривизну. При винтовом извивании шнура силовые линии действительно становятся более прямыми. При достаточно большом извивании шнура силовые линии вообще могут полностью распрямиться, а шнур при этом превращается в винтовую ленту (рис. 61, а).

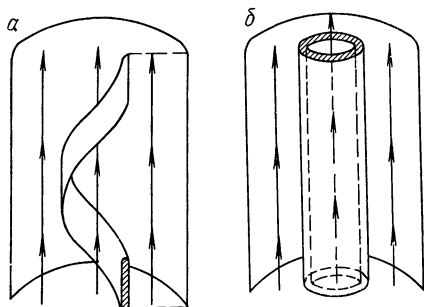


Рис. 61. Образование винтовой ленты (а) и трубчатой конфигурации (б) при винтовой неустойчивости

Радиус такой равновесной спирали можно найти из условия сохранения магнитного потока, охватываемого проводником. Для упрощения рассуждений соединим проводник с кожухом проводящей нитью на торцах (см. штриховые линии на рис. 60 и 61, а). В исходном состоянии проводник с кожухом и проводящей нитью охватывает поток  $\Phi_0 = B_\theta L a \ln(b/a)$ , где  $B_\theta$  — азимутальное магнитное поле на границе шнура. Этот поток образован только азимутальным полем. При извивании шнура (мода  $m=1$ ) он охватывает также и продольное поле, а в конечном состоянии ( $B_\theta=0$ ) весь поток создается только продольным полем. Он равен  $\pi r_0^2 B_0 n$ , где  $n$  — число витков спирали. Приравнявая потоки, получим

$$r_0^2 = \frac{2a^2}{qn} \ln \frac{b}{a}, \quad (5.17)$$

где мы ввели так называемый коэффициент запаса по винтовой устойчивости

$$q = \frac{2\pi a B_0}{L B_\theta} = \frac{a B_0}{R B_\theta}, \quad (5.18)$$

смысл которого будет пояснен ниже. В этом конечном состоянии азимутальное магнитное поле полностью исчезает и вся его энергия передается жидкости (т. е. переходит в тепло, если кинетическая энергия диссипирует, например из-за вязкости). Впрочем, винтовая лента не является еще вполне равновесным состоянием: силовые линии продольного поля будут сплющивать ее до тех пор, пока не превратят в трубку того же радиуса  $r_0$  (рис. 61, б).

Точно такой же процесс извивания и образования полого цилиндра может быть прослежен при возмущении с  $m > 1$ . Вся разница состоит в том, что при этом шнур разбивается на  $m$  винтовых нитей и каждая нить в конечном состоянии будет охватывать продольный поток не  $n$ , а  $n/m$  раз на длине шнура. Затем эти нити сольются в трубку, и для ее радиуса  $r_0$  получим вместо (5.17)

$$r_0^2 = \frac{2a^2 m}{qn} \ln \frac{b}{a}. \quad (5.19)$$

Для наиболее неустойчивых возмущений  $m = nq$  и радиус трубки  $r_0 = a \sqrt{\ln(b^2/a^2)}$ . Но в принципе извивание шнура и исчезновение азимутального потока, а вместе с ним и энергии азимутального поля, должны происходить при любых  $m$ ,  $n$  даже в том случае, когда согласно (5.16) шнур устойчив по отношению к линейным возмущениям. Можно сказать, что шнур с током находится в метастабильном состоянии и в зависимости от моды возмущения он может либо непосредственно «скатиться» в основное состояние, либо он отделен от этого состояния потенциальным барьером.

При рассмотренных нами винтовых деформациях жидкого проводника его объем, естественно, сохраняется, так что продольное магнитное поле в конечном состоянии имеет ту же энергию, что и в исходном. Следовательно, винтовая неустойчивость развивается только за счет энергии азимутального магнитного поля.

Рассмотрим теперь более реальный случай плазменного шнура с током. Будем опять предполагать, что

$B_0 \gg B_\theta$ ,  $\beta \ll 1$ , и допустим для простоты, что ток распределен равномерно по сечению шнура. При этом в исходном состоянии азимутальное магнитное поле будет иметь вид, показанный на рис. 62, *а*. Внутри шнура поле линейно возрастает с радиусом, и поэтому шаг силовых линий здесь постоянен.

Рассмотрим опять винтовое возмущение шнура и допустим, что его шаг в точности совпадает с шагом силовых линий внутри шнура. Такое возмущение никак не влияет на магнитное поле внутри плазмы, и шаг внутренних силовых линий остается постоянным даже при деформациях конечной амплитуды. Но тогда мы должны ожидать, что картина будет точно такой же,

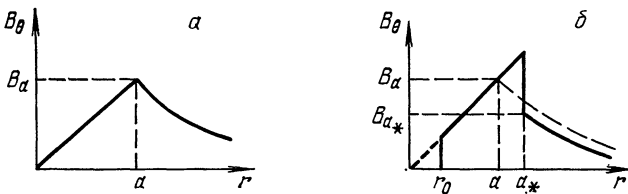


Рис. 62. Распределение азимутального магнитного поля в исходном состоянии (*а*) и при образовании «пузыря» (*б*)

как и в случае жидкого несжимаемого проводника. А именно, энергия азимутального поля будет минимальной, когда внутри шнура появится «пузырь» — вакуумная область с продольным магнитным полем.

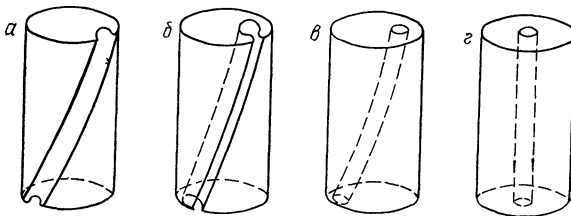
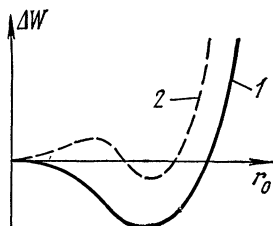


Рис. 63. Образование «пузыря» в плазме

Образование такого пузыря показано на рис. 63. В случае постоянного шага силовых линий пузырь можно довести до центра, практически не возмущая магнитного поля (стало быть, в этом случае пузырь нейтраль-

но устойчив внутри шнура). Распределение поля теперь будет иметь вид рис. 62, б, где  $a_*$  — новый радиус шнура, а  $r_0$  — радиус пузыря. Сравнивая энергии начального и конечного состояний, нетрудно показать, что процесс образования пузыря в плазме является выгодным. Изменение энергии поля  $\Delta W$  при образовании пузыря в зависимости от его радиуса изображено на рис. 64 (кривая 1). На этом же рисунке приведена функция  $\Delta W$  для случая, когда по поверхности шнура течет ток и

Рис. 64. Потенциальная энергия пузыря как функция его радиуса: шаг возмущения совпадает (1) и не совпадает (2) с шагом силовых линий



возмущения имеют шаг, равный шагу внутренних силовых линий и отличный от шага внешних силовых линий (кривая 2). Как мы видим, в последнем случае энергетически выгодны только пузыри с достаточно большим радиусом. А при большой перекрещенности внутренних и внешних силовых линий образование пузырей становится невыгодным.

Упомянув о перекрещенности силовых линий, мы тем самым привлекли внимание читателей к одному из наиболее эффективных механизмов стабилизации винтовой неустойчивости.

В самом деле, если шаг силовых линий внутри шнура не постоянен, то при любой винтовой его деформации приходится возмущать продольное магнитное поле, а это безусловно будет приводить к стабилизирующему эффекту.

Рассмотрим, например, случай, когда весь ток течет по поверхности шнура, так что магнитное поле  $B_i$  внутри шнура равно согласно условию равновесия на границе  $B_i^2 = B_0^2 + B_\theta^2 \approx B_0^2$  тому же полю, что и снаружи (мы опять предполагаем  $B_\theta \ll B_0$ ). При этом из-за деформации внутреннего поля в квадрат частоты должен быть вклад такого же вида, как и при альвеновских

колебаниях, а именно

$$4 \pi \rho_0 \omega^2 = k^2 B_0^2 + \left( k B_0 + \frac{m}{a} B_\theta \right)^2 - \frac{m B_\theta^2}{a^2}. \quad (5.20)$$

При равных нулю двух последних слагаемых, появившихся согласно (5.16) от внешней области шнура, мы имели бы просто дисперсионное уравнение для альвеновских волн внутри шнура. Первое слагаемое действительно оказывает сильное стабилизирующее действие. Как видно из (5.20), неустойчивым может быть только возмущение с  $m=1$ , но и в этом случае шнур устойчив, если  $k = n/R > B_\theta/aB_0 = 1/qR$ . Так как  $n \geq 1$ , то отсюда следует, что шнур устойчив при

$$q = \frac{a B_0}{R B_\theta} > 1. \quad (5.21)$$

Это условие было получено Крускалом и Шафрановым и носит их имя.

Теперь мы видим, почему  $q$  имеет смысл коэффициента запаса устойчивости: чем больше  $q$ , тем более устойчив шнур по отношению к винтовой неустойчивости. В реальных условиях токамаков, где для стабилизации используется сильное продольное магнитное поле, плазма достаточно устойчива при  $q > 2 \div 3$ .

Итак, мы познакомились с двумя главными представителями МГД-неустойчивостей: желобковой и винтовой. Для первой из них энергетическим резервуаром неустойчивости служит энергия плазмы, для второй — энергия магнитного поля. В общем случае  $\beta \sim 1$ ,  $B_\theta \sim B_0$  эти неустойчивости могут действовать совместно, и критерии их стабилизации могут быть весьма сложными; их рассмотрение служит предметом специальных исследований (см. цитированную по этой тематике литературу).

**3. Диссипативные неустойчивости.** До сих пор мы предполагали, что проводимость плазмы бесконечна. При конечной, но достаточно большой проводимости приведенные выше соотношения справедливы только для возмущений с достаточно большими длинами волн и достаточно быстрых колебаний. Кроме того, при  $\sigma \neq \infty$  могут появиться новые ветви медленных неустойчивостей, которые принято называть диссипативными. Мы рассмотрим два примера наиболее важных диссипативных неустойчивостей.

а) Гравитационная диссипативная неустойчивость. Эта неустойчивость тесно связана с желобковой и является как бы ее продолжением. Она проявляется в тех же условиях спадающего к периферии магнитного поля, но тогда, когда возмущения желобкового типа по тем или иным соображениям запрещены, например, когда имеет место локальное спадание поля, а в целом плазма по отношению к желобкам устойчива.

При рассмотрении гравитационной неустойчивости мы предполагаем, что возмущения не постоянны вдоль силовых линий, а меняются как  $\exp(ik_z z)$  (ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля). Для электронов и ионов мы опять можем воспользоваться уравнениями типа (5.4) — (5.6), но лишь линеаризуем их, т. е. в правых частях вместо сил, которые в исходном состоянии уравновешены соответствующими дрейфами, мы подставим их отклонение от равновесного значения, которое пропорционально  $n'/n$ , где  $n'$  — возмущение плотности (мы предполагаем, что плазма квазинейтральна). Тогда имеем

$$-i\omega m_i v_x = \frac{e}{c} v_{iy} B + \frac{n' T_i}{n R}, \quad (5.22)$$

$$0 = -\frac{e}{c} v_x B + e E, \quad (5.23)$$

$$0 = -\frac{e}{c} v_{ey} B + \frac{n' T_e}{n R}. \quad (5.24)$$

Так как теперь возмущение модулировано вдоль силовых линий, электрические заряды, возникающие из-за поляризации, могут перетекать вдоль силовых линий. Соответственно и поле  $E = -ik_y \phi$  в этом случае будет меньше ( $\phi$  — потенциал электрического поля). Его можно найти из условия баланса токов,

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = ik_z j_z + ik_y j_y = \sigma k_z^2 \phi + ik_y e n (v_{iy} - v_{ey}) = 0, \quad (5.25)$$

где  $\sigma$  — удельная проводимость.

С помощью уравнений (5.22) — (5.25) и уравнения непрерывности

$$-i\omega n' + v_x \frac{dn}{dx} = 0 \quad (5.26)$$

нетрудно найти выражение для частоты  $\omega$ . Оно имеет вид

$$\omega^2 + i \omega_s \omega + \omega_g^2 = 0, \quad (5.27)$$

где введены следующие обозначения:

$$\omega_s = \frac{k_z^2 \sigma B^2}{k_y^2 c^2 n m_i} = \frac{k_z^2}{k_y^2} \Omega_i \Omega_e \tau_e,$$

$$\omega_g^2 = - \frac{(T_i + T_e)}{R n m_i} \frac{d n}{d x}.$$

При  $\omega_s = 0$  мы имеем обычную желобковую неустойчивость с инкрементом  $\gamma = \omega_g$ . Однако в «сильно замагниченной» плазме, т. е. при  $\Omega_e \tau_e \gg 1$ , величина  $\omega_s$  может быть значительно больше  $\omega_g$ , и в этих условиях инкремент неустойчивости сильно уменьшается, так как согласно (5.27)  $\gamma = -i\omega \approx \omega_g^2 / \omega_s \ll \omega_g$ . Неустойчивость с таким инкрементом и называется гравитационной диссипативной (термин «гравитационная» здесь имеет условный смысл и использован в связи с тем, что выталкивающая сила в (5.22), (5.24) сходна с силой тяжести, а желобковая неустойчивость сходна с неустойчивостью Рэлея—Тейлора тяжелого слоя жидкости, расположенного над легким слоем).

б) Токово-конвективная неустойчивость. Другая диссипативная неустойчивость имеет место при наличии продольного тока и в некотором смысле является диссипативным аналогом винтовой неустойчивости.

Пусть вдоль однородного поля  $\mathbf{B}_0$ , направленного вдоль оси  $z$ , течет ток  $j = \sigma E$  настолько слабый, что создаваемое им магнитное поле значительно меньше  $B_0$ . Предположим, что проводимость плазмы в равновесном состоянии является некоторой медленно меняющейся функцией координаты  $x$ . В полностью ионизованной плазме, где проводимость зависит только от температуры электронов, это изменение может быть обусловлено изменением температуры, а в слабоионизованной плазме градиент проводимости может быть следствием градиента плотности.

Пусть на это состояние наложено возмущение типа  $\exp(-i\omega t + ikr)$ . Величину  $k_x$  мы будем считать малой. Предположим, что электрическое поле является безвих-

ревым и что поперечные электрические токи отсутствуют (электроны и ионы дрейфуют поперек поля совместно). Тогда из условия отсутствия возмущения продольного поля получим

$$-i k_z \varphi \sigma + \sigma' E = 0. \quad (5.28)$$

Здесь  $\sigma'$  — возмущение проводимости плазмы, которое происходит из-за дрейфа плазмы в поперечном направлении:

$$-i \omega \sigma' - i \frac{c k_y \varphi}{B_0} \frac{d\sigma}{dx} = 0. \quad (5.29)$$

Из уравнений (5.28), (5.29) находим инкремент нарастания малых винтовых возмущений:

$$\gamma = \frac{k_y c E}{k_z B_0 \sigma} \frac{d\sigma}{dx}. \quad (5.30)$$

Как мы видим, знак  $\gamma$  зависит от знака  $k_y/k_z$ , т. е. от наклона возмущения по отношению к оси  $z$ . Физика токово-конвективной неустойчивости пояснена на рис. 65.

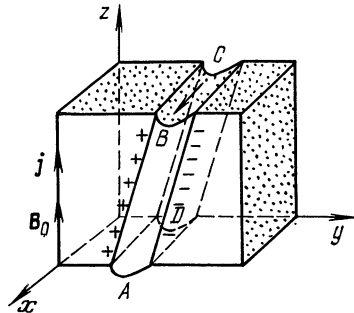


Рис. 65. Слой неоднородной плазмы с «косым» возмущением ее плотности

Здесь изображен слой плазмы, у которого проводимость убывает с  $x$ , а ток  $\mathbf{j}$  и поле  $\mathbf{B}_0$  направлены по оси  $z$ . При смещении косога слоя  $ABCD$  по  $x$  его проводимость несколько повысится (в силу  $d\sigma/dx < 0$ ). Поэтому на его граничных поверхностях выступят заряды — положительный на верхней поверхности и отрицательный на нижней. Эти заряды приведут к появлению электрического поля с отличной от нуля поперечной компонентой  $E_y$ . При соответствующем знаке  $k_y/k_z$  дрейф плазмы в этом поле будет происходить в направлении первоначального смещения и, следовательно, приведет к усилению начального возмущения.



Токово-конвективная неустойчивость была очень подробно исследована теоретически и экспериментально на тлеющем разряде в сильном продольном магнитном поле. В полностью ионизованной высокотемпературной плазме ее роль снижается, так как ее инкремент убывает с ростом проводимости.

Токово-конвективная неустойчивость развивается в отсутствие возмущения магнитного поля. Существует другой диссипативный (точнее, резистивный — связанный с отличным от нуля сопротивлением) аналог винтовой неустойчивости — так называемая тиринг-неустойчивость. Она отличается от обычной винтовой неустойчивости только более сложными процессами в области, где шаг возмущения совпадает с шагом силовых линий. Тиринг-неустойчивость также является более медленной, чем винтовая.

4. *Дрейфовые неустойчивости.* Как мы установили в гл. 1, ко всем медленным движениям плазмы одножидкостное приближение неприменимо и следует учитывать эффект Холла. Соответственно и полученные выше выражения для инкрементов диссипативных неустойчивостей справедливы, строго говоря, только в условиях, когда они велики по сравнению с характерными частотами дрейфового движения.

а) *Дрейфовые волны.* Развитие дрейфовых неустойчивостей связано с раскачкой дрейфовых волн — своеобразной ветвью колебаний неоднородной плазмы. Для их описания можно воспользоваться двухжидкостным приближением. Рассмотрим слой плазмы с неоднородной по  $x$  плотностью и наложим на него возмущения типа плоской волны. Будем считать, что возмущения сильно вытянуты вдоль магнитного поля, так что смещением ионов вдоль поля можно пренебречь (это верно, если частота колебаний  $\omega \gg c_s k_z$ ,  $c_s$  — скорость звука). Тогда для возмущения плотности ионов, учитывая, что в поле волны они совершают дрейф со скоростью  $v_x = cE_y/B_0$ , получим

$$-i\omega n' - \frac{ik_y c \varphi}{B_0} \frac{dn}{dx} = 0, \quad (5.31)$$

где  $\varphi$  — потенциал электрического поля.

Если допустить, что

$$\omega/k_z \ll v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e},$$

то электроны вдоль силовых линий будут иметь больцмановское распределение

$$n' = \frac{e \varphi n}{T_e}. \quad (5.32)$$

Считая, что плазма квазинейтральна, мы использовали одно и то же обозначение  $n'$  для возмущений плотности электронов и ионов. Из (5.31), (5.32) находим частоту дрейфовых волн:

$$\omega \equiv \omega_* = - \frac{c k_y T_e}{e n B_0} \frac{d n}{d x}. \quad (5.33)$$

Фазовая скорость этих волн  $\omega/k_y$  направлена в сторону дрейфа электронов в равновесном неоднородном слое плазмы, причем она в точности совпадает с дрейфовой (ларморовской) скоростью электронов, которая может быть найдена из уравнения равновесия

$$\frac{d}{d x} n T_e = - \frac{e}{c} n v_{ey} B_0. \quad (5.34)$$

Как мы видим, при  $T_e = \text{const}$  величина  $v_{ey} = \omega_*/k_y$ .

б) Дрейфово-диссипативная неустойчивость. При наличии различных диссипативных процессов дрейфовые волны становятся неустойчивыми. Мы рассмотрим здесь лишь самый простой тип диссипации, связанный с продольной проводимостью, т. е. с трением электронов о ионы при их продольном движении. Соответствующая неустойчивость получила название дрейфово-диссипативной или универсальной.

Эту неустойчивость можно описать с помощью уравнений (5.22) — (5.25), если вместо обычного закона Ома  $j_z = \sigma E_z$  использовать его двухжидкостный аналог

$$j_z = \sigma \left( E_z - \frac{T_e}{e n} \frac{\partial n}{\partial z} \right). \quad (5.35)$$

Подставляя в (5.25) вместо  $j_z = ik_z \sigma \varphi$  выражение  $j_z = ik_z \sigma (\varphi - n' T_e / e n)$  и повторяя выкладки п. а), мы получим вместо (5.27) уравнение вида

$$\omega^2 + i \omega \omega_s - i \omega_* \omega_s + \omega_g^{\infty} = 0, \quad (5.36)$$

где частота дрейфовых волн  $\omega_*$  дается выражением (5.33). Так как обычно  $\omega_s$  очень велико, то из (5.36)

приближенно получаем

$$\omega \approx \omega_* + i \frac{\omega_*^2 + \omega_g^2}{\omega_s}. \quad (5.37)$$

Отсюда видно, что даже в однородном поле, т. е. при  $\omega_g = 0$ , плазма оказывается неустойчивой и дрейфовая волна нарастает по амплитуде.

Кроме конечной проводимости к раскачке дрейфовых волн могут приводить и другие механизмы диссипации. Эти же механизмы (например, вязкость) могут и стабилизировать дрейфовые неустойчивости. Так как дрейфовые неустойчивости связаны с сильно вытянутыми вдоль магнитного поля возмущениями, то они представляют меньшую опасность для удержания плазмы, чем МГД-неустойчивости.

5. *Кинетические неустойчивости.* Для кинетических неустойчивостей существенно различие в движении разных групп частиц, и они могут быть теоретически описаны с помощью уравнения Власова.

а) Неустойчивость пучка в плазме. Простейшим примером кинетической неустойчивости может служить электронный пучок в плазме. Рассмотрим сначала монохроматический пучок с плотностью  $n_b$  и скоростью  $V$  в холодной плазме. Такой пучок может возбуждать ленгмюровские волны. Инкремент нарастания продольных волн можно легко получить из дисперсионного уравнения  $\epsilon = 0$ , где, кроме вклада от электронов плазмы, нужно учесть вклад от пучка. Легко видеть, что

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{n_b}{n} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - kV)^2}, \quad (5.38)$$

где  $k$  — волновое число возмущения. Здесь вклад от пучка имеет в точности такой же вид, как вклад от холодных электронов, лишь частота испытывает доплеровское смещение (в системе отсчета, связанной с пучком, вклад от пучка имеет тот же вид, как вклад от холодных электронов).

Полагая  $\epsilon = 0$ , нетрудно найти инкремент нарастания малых возмущений. Когда  $n_b \ll n$ , он максимален при  $kV = \omega_{pe}$  и равен

$$\gamma = \left( \frac{n_b}{2n} \right)^{1/2} \omega_{pe}. \quad (5.39)$$

Если пучок несколько размыт по скоростям, т. е. имеется разброс  $\Delta V$ , то при  $\Delta V > \gamma/k$  приближение монохроматического пучка становится неприменимым. В этом случае можно воспользоваться кинетическим уравнением Власова. Считая  $n_b \ll n$  и  $\Delta V \gg \gamma/k$ , мы можем оставить от пучка только мнимую часть вклада в  $\varepsilon$ . При этом дисперсионное уравнение примет вид (2.123), т. е. для холодной плазмы

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \pi i \frac{\omega_{pe}^2}{n k^2} \left. \frac{df}{dv} \right|_{v=\omega/k} = 0. \quad (5.40)$$

Отсюда видно, что инкремент

$$\gamma = \frac{\pi \omega_{pe}}{2 n k^2} \left. \frac{df}{dv} \right|_{v=\omega_{pe}/k} \quad (5.41)$$

положителен только при положительной производной функции распределения в точке резонанса  $v = \omega_{pe}/k$ . Таким образом, для раскачки колебаний нужно, чтобы на хвосте электронной функции распределения имелся «горб», соответствующий размытому пучку.

б) Ионный звук в плазме с током. В качестве другого важного примера рассмотрим ионно-звуковые колебания в неизотермической плазме ( $T_i \ll T_e$ ) при наличии электрического тока. Будем считать, что функция распределения электронов близка к максвелловской, сдвинутой на значение дрейфовой скорости  $u = -j/en$ . Для нахождения инкремента опять воспользуемся уравнением  $\varepsilon = 0$ . Действительная часть  $\varepsilon$  для ионного звука была нами найдена ранее [см. (2.102)] с помощью гидродинамического приближения, а мнимую мы можем учесть с помощью (2.123). Таким образом, имеем

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c_s^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \pi i \frac{\omega_{pe}^2}{n k^2} \int k \frac{\partial f_e}{\partial v} \delta(\omega - k v) dv = 0. \quad (5.42)$$

Для сдвинутой на  $u$  максвелловской функции распределения

$$\frac{\partial f_e}{\partial v} = - \frac{m_e (v - u)}{T_e} f_e,$$

и для инкремента легко находим

$$\gamma = \frac{\omega^3}{k^2 c_s^2} \sqrt{\frac{\pi m_e}{8 T_e}} \left( u \cos \theta - \frac{\omega}{k} \right), \quad (5.43)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{k}$ .

Как мы видим, ионно-звуковые волны начинают нарастать, когда направленная скорость электронов превышает скорость звука. При этом инкремент невелик,  $\gamma/\omega \sim u/v_{Te}$ , где  $v_{Te}$  — тепловая скорость электронов.

в) Кинетические конусные неустойчивости. Неустойчивости кинетической природы могут развиваться и в адиабатических ловушках. Дело в том, что у адиабатической ловушки есть врожденный порок: она удерживает только те частицы, которые не попадают в запрещенный конус (конус потерь). Это автоматически приводит к инверсии заселенностей энергетических уровней. В самом деле, введем пространство скоростей. Функция распределения частиц по скоростям  $f(v_z, v_\perp)$  отлична от нуля только в заштрихованной области на рис. 66, а. Если даже  $f(v_z, v_\perp)$  примерно постоянна в некоторой области не очень больших  $v_\perp$ , то функция распределения по поперечным скоростям

$$f(v_\perp) = \int f(v_z, v_\perp) dv_z$$

будет возрастающей просто в силу того, что интервал  $\Delta v_z \sim v_\perp$ . При достаточно больших  $v_\perp$  функция  $f(v_z, v_\perp)$ , а вместе с ней и  $f(v_\perp)$ , должна убывать, так что полный график  $f(v_\perp)$  имеет вид, показанный на рис. 66, б. В области  $v_\perp < v_0$  функция распределения возрастает с ростом  $v_\perp$ , а это и означает, что имеет место инверсная заселенность по поперечной энергии: частиц с большой энергией больше, чем с малой.

По аналогии с лазерами отсюда можно заключить, что если в плазме найдется волна, которая резонансным образом будет взаимодействовать с инверсной популяцией частиц, то может иметь место индуцированная генерация волн, т. е. экспоненциальное нарастание малых колебаний со временем. Таким образом, вопрос о раскэчке кинетических неустойчивостей состоит в том, какие волны в плазме могут попадать в резонанс и как этот резонанс осуществляется. Эти вопросы ставятся несколько различным образом для ионно-горячей и электронно-горячей плазм.

Рассмотрим более интересную ионно-горячую плазму. Ясно, что с ионами могут эффективно взаимодействовать лишь низкочастотные колебания, имеющие частоты порядка характерных ионных частот  $\Omega_i$  или  $\omega_{pi}$ . В лабораторной плазме величина  $\beta = 8\pi p/B^2$  чрезвычайно мала, поэтому соответствующие волны являются продольными (электростатическими) — магнитное поле в них не возмущается. К ним относятся косые ленгмюровские волны, распространяющиеся под углом к магнитному полю,

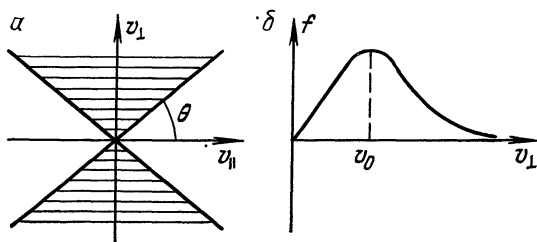


Рис. 66. Инверсная заселенность уровней в адиабатической ловушке

ионно-звуковые и циклотронные волны, а также различные их комбинации. В неоднородной плазме к ним добавляются дрейфовые волны.

Что касается резонанса волн с ионами, то при наличии сильного магнитного поля он существует на гармониках циклотронной частоты  $\Omega_i$ . Хотя соответствующий эффект является, разумеется, чисто классическим, его проще рассмотреть с квантовой точки зрения как предельный случай индуцированных переходов с участием большого числа квантов. (Квантовые образы вошли в современное физическое мышление настолько глубоко, что даже чисто классическое понятие резонанса более просто формулируется на языке квантов!) С квантовой точки зрения неустойчивость — это индуцированное испускание кванта  $\hbar\omega$  с импульсом  $\hbar k_z$  вдоль магнитного поля. Поскольку в сильном магнитном поле поперечное движение заряженных частиц квантовано (уровни Ландау с интервалом  $\hbar\Omega_i$  между уровнями), то законы сохранения энергии и продольного импульса при переходе принимают вид

$$\hbar\omega + m_i v_z \Delta v_z - l \hbar \Omega_i = 0, \quad (5.44)$$

$$\hbar k_z + m_i \Delta v_z = 0, \quad (5.45)$$

где  $\Delta v_z$  — малое изменение продольной скорости при переходе, а  $l$  — целое число, соответствующее переходу частиц на более низкий уровень, отстоящий на  $l\hbar\Omega_i$  от исходного, так что  $m_i v_\perp \Delta v_\perp = -l\hbar\Omega_i$ . Из (5.44), (5.45) получаем соотношение

$$\omega - k_z v_z - l\Omega_i = 0, \quad (5.46)$$

которое представляет собой условие резонанса частицы с волной. Оно имеет простой смысл: в системе координат, движущейся вдоль  $z$  вместе с частицей, частота колебаний в точности равна  $l$ -й гармонике циклотронной частоты. При  $l > 0$ , когда при испускании волны частица переходит на более низкий поперечный уровень, говорят о нормальном доплер-эффekte, а при  $l < 0$  используют термин «аномальный доплер-эффект». Неустойчивость имеет место только в том случае, если заселенность на верхнем (исходном) энергетическом уровне больше, чем на нижнем, т. е. если

$$\int [f(v_z, \varepsilon_\perp) - f(v_z + \Delta v_z, \varepsilon_\perp - l\hbar\Omega_i)] \delta(\omega - k_z v_z - l\Omega_i) dv_z d\varepsilon_\perp > 0, \quad (5.47)$$

где  $\varepsilon_\perp = m_i v_\perp^2 / 2$  — поперечная энергия, а  $\delta$ -функция отбирает только резонансные частицы. Устремляя  $\hbar \rightarrow 0$ , из (5.47) с учетом (5.44), (5.45) находим

$$\int \left( k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{l\Omega_i}{v_\perp} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \right) \delta(\omega - k_z v_z - l\Omega_i) dv_z v_\perp dv_\perp > 0. \quad (5.48)$$

Это и есть условие раскачки колебаний в анизотропной плазме.

6. *Параметрические неустойчивости.* При прохождении через плазму сильных электромагнитных волн или при проникновении в плазму внешних переменных полей в ней возникают сильные регулярные колебания электронов и ионов. Эти колебания также могут послужить источником неустойчивостей. Так как соответствующие неустойчивости развиваются на фоне периодических колебаний плазмы и сами подчас принимают форму параметрического резонанса, то эти неустойчивости называют параметрическими.

Мы познакомимся здесь с параметрическими неустойчивостями на простейшем, но типичном примере воз-

буждения двух нелинейно связанных волн — ионно-звуковой и ленгмюровской — внешней волной накачки.

Предположим, что в плазме имеется сильная волна с электрическим полем вдоль оси  $x$

$$E = E_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x) + \text{к. с.} \quad (5.49)$$

Величину  $E_0$  мы для простоты будем считать действительной. Эта волна может быть, например, ленгмюровской с частотой  $\omega_0 = \omega_{pe}$  и волновым числом  $k_0$ . При  $k_0 \rightarrow 0$  электрическое поле, задаваемое выражением (5.49), может принадлежать поперечной волне или внешнему источнику с частотой, близкой к  $\omega_{pe}$  (напомним, что у поперечной волны  $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2$ , т. е. волновое число мало при  $\omega \rightarrow \omega_{pe}$ ). Именно при малой расстройке,  $|\omega - \omega_{pe}| \ll \omega_{pe}$ , наиболее сильно проявляются параметрические эффекты, и поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что  $\omega_0$  близка к  $\omega_{pe}$ .

Высокочастотная волна приводит электроны в колебательное движение с амплитудой

$$\tilde{v}_0 = -\frac{ie}{m_e \omega_0} E_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x) + \text{к. с.} \quad (5.50)$$

Предположим теперь, что кроме внешней волны, которую мы будем называть волной накачки, в плазме присутствуют ленгмюровская и ионно-звуковая волны малой амплитуды. Покажем, что взаимодействие их с волной накачки может приводить к нарастанию их амплитуды. Для простоты будем считать, что эти волны распространяются вдоль оси  $x$ .

Рассмотрим сначала высокочастотные ленгмюровские колебания. Как мы знаем, они имеют непрерывный спектр и в каждой точке частота колебаний равна местной ленгмюровской (мы предполагаем, что длина волны много больше дебаевской, так что тепловой поправкой можно пренебречь). Учтем теперь, что медленные ионно-звуковые колебания приводят к небольшому отклонению  $n$  плотности от равновесного значения  $n$ .

Для скорости колебаний электронов в волне  $\tilde{E}$  имеем просто

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \tilde{E}, \quad (5.51)$$



а электрическое поле может быть найдено из уравнения

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = -4\pi \tilde{j} = 4\pi e [(n + \delta n)(\tilde{v} + \tilde{v}_0) - n \tilde{v}_0], \quad (5.52)$$

где  $\tilde{j}$  — ток ленгмюровской волны. Так как, по предположению, амплитуды ленгмюровской и ионно-звуковой волн малы, то в (5.52) мы пренебрежем квадратичным членом  $\delta n \tilde{v}$ . Дифференцируя (5.51) по времени и исключая затем производную по времени от электрического поля с помощью (5.52), мы получим уравнение для осцилляций электронов

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 \tilde{v} = -\frac{\delta n}{n} \omega_{pe}^2 \tilde{v}_0, \quad (5.53)$$

где  $\omega_{pe}$  — невозмущенная ленгмюровская частота.

В низкочастотных колебаниях принимают участие как электроны, так и ионы. Уравнение движения для ионов выглядит очень просто:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{e}{m_i} E, \quad (5.54)$$

где  $v$  — скорость ионов,  $E$  — поле медленной волны. Поле  $E$  можно найти из уравнения движения для электронов

$$m_e \frac{\partial v_e}{\partial t} + m_e v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} + \frac{T_e}{n} \frac{\partial}{\partial x} \delta n = -e E. \quad (5.55)$$

Здесь первым инерционным членом для медленного движения можно пренебречь, а во втором члене мы сохраним линейное по  $\tilde{v}$  слагаемое  $m_e \partial(\tilde{v}_0 \tilde{v})/\partial x$ . Разумеется, здесь достаточно оставить лишь медленно меняющуюся часть, которую мы обозначим угловыми скобками, означающими усреднение по высокочастотным колебаниям. Учитывая еще уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n + n \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.56)$$

и исключая с помощью (5.54), (5.55)  $E$  и  $\tilde{v}$ , мы получим уравнение для  $\delta n$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta n = n \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \tilde{v} \tilde{v}_0 \rangle. \quad (5.57)$$

Уравнения (5.53), (5.57) описывают связанные через волну накачки ленгмюровские и ионно-звуковые волны.

Если амплитуда волны накачки мала, то заметный эффект возбуждения связанных волн может иметь место только при условии резонанса. А именно, пусть эти волны являются монохроматическими:

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= a \exp(-i \omega_{pe} t + i k_p x), \\ \frac{\delta n}{n} &= i b \exp(i \omega_s t - i k_s x),\end{aligned}\quad (5.58)$$

где  $a, b$  — медленно меняющиеся амплитуды. Тогда при выполнении резонансных условий

$$\omega_0 = \omega_{pe} + \omega_s, \quad k_0 = k_p + k_s \quad (5.59)$$

в пренебрежении вторыми производными по времени от медленно меняющихся амплитуд  $a, b$  уравнения (5.53), (5.57) принимают простой «укороченный» вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\omega_{pe}}{2} v_0 b, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{m_e k_s}{2m_i c_s} v_0 a, \quad (5.60)$$

где  $v_0 = eE_0/m_e$  — амплитуда колебаний электронов в волне накачки.

Эти уравнения отличаются от рассмотренных нами ранее уравнений при знакомстве с трехволновыми взаимодействиями (3.88) — (3.90) только тем, что волну  $v_0$  мы считаем сильной с заданной амплитудой и не используем нормировку для амплитуд, сделанную в § 4 гл. 3.

Уравнения (5.60) имеют экспоненциально нарастающее решение с инкрементом  $\gamma$ , определяемым дисперсионным уравнением

$$\gamma^2 = \frac{m_e}{4m_i} \frac{\omega_{pe} k_s}{c_s} v_0^2. \quad (5.61)$$

Как мы видим, инкремент пропорционален амплитуде волны накачки. Соответствующая неустойчивость, которую тоже можно было бы назвать параметрической, описывает самое начало «распада» волны накачки на ленгмюровскую и ионно-звуковую. В литературе она известна как распадная неустойчивость.

При достаточно большой амплитуде накачки  $v_0$  инкремент может превысить собственную частоту ионного звука  $\omega_s = c_s k_s$ . В этом случае в уравнениях (5.53), (5.57) нужно воспользоваться другим приближением.

А именно, в (5.57) можно пренебречь вторым членом в правой части. Предполагая опять, что частота  $\omega_0$  близка к  $\omega_{pe}$  и пренебрегая расстройкой  $\omega_0 - \omega_{pe}$ , мы можем записать уравнения (5.53), (5.57) в упрощенном виде

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{i \omega_{pe}}{2n} \delta n v_0, \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n = -\frac{m_e}{m_i} n k_s^2 a v_0. \quad (5.63)$$

Здесь мы опять предположили, что выполняется соотношение  $k_0 = k_p + k_s$ . Из уравнений (5.62), (5.63) вытекает, что связанные ленгмюровские и ионные низкочастотные колебания нарастают со временем с инкрементом  $\gamma \sim v_0^3$ . При этом говорить о ионном звуке уже нет смысла: в рассматриваемых колебаниях сила Миллера значительно превышает градиент давления. Соответствующую неустойчивость называют параметрической или модифицированной распадной.

И наконец, те же уравнения (5.53), (5.57) в случае  $k_0 \rightarrow 0$ , например для электромагнитной волны накачки, допускают еще одно приближенное решение. А именно, при достаточно большой амплитуде накачки обе комбинационные частоты  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$  ( $\Omega$  — частота ионных колебаний) близки к  $\omega_{pe}$ , так что в уравнениях нужно учесть сразу обе гармоники. Будем считать, что  $\delta n \sim \exp(-i\Omega t)$ , а

$$\tilde{v} = v_+ \exp[-i(\Omega + \omega_0)t] + v_- \exp[-i(\Omega - \omega_0)t],$$

и пренебрежем вторым членом в левой части (5.57), полагая, что амплитуда накачки достаточно велика, а возмущения протяженны по  $x$ . При этом можно считать, что и у  $\delta n$ , и у  $v$  зависимость от  $x$  одна и та же:  $\sim \exp(ikx)$ . Полагая  $\tilde{v}_0 = v_0 \exp(-i\omega_0 t) + v_0^* \exp(i\omega_0 t)$ , получим после подстановки этих выражений в (5.53), (5.57)

$$\Omega^2 \delta n = \frac{m_e}{m_i} n k^2 (v_+ v_0^* + v_- v_0), \quad (5.64)$$

$$[\omega_{pe}^2 - (\omega_0 + \Omega)^2] v_+ = -\omega_{pe}^2 v_0 \frac{\delta n}{n},$$

$$[\omega_{pe}^2 - (\omega_0 - \Omega)^2] v_- = -\omega_{pe}^2 v_0^* \frac{\delta n}{n}. \quad (5.65)$$

Таким образом, мы получаем систему трех однородных уравнений для  $\delta n$ ,  $v_+$ ,  $v_-$ . Условием их разрешимости является обращение в нуль детерминанта системы. Считая, что расстройка  $\Delta = \omega_0 - \omega_{pe}$  и частота  $\Omega$  малы, уравнения (5.65) можно упростить:

$$\begin{aligned}(\Delta + \Omega) v_+ &= \omega_{pe} v_0 \frac{\delta n}{2n}, \\(\Delta - \Omega) v_- &= \omega_{pe} v_0^* \frac{\delta n}{2n}.\end{aligned}\quad (5.66)$$

Если теперь подставить полученные отсюда значения  $v_+$  и  $v_-$  в (5.64), то мы получим дисперсионное уравнение для  $\Omega$ :

$$\Omega^2 (\Omega^2 - \Delta^2) + \frac{m_e}{m_i} \omega_{pe} k^2 |v_0|^2 \Delta = 0. \quad (5.67)$$

Это уравнение имеет комплексные решения для  $\Omega$  (которые соответствуют неустойчивости) в широкой области значений  $\Delta$  (за исключением больших положительных  $\Delta$ ). Максимальный инкремент  $\gamma$  достигается при

$$\Delta \sim \gamma \sim \left( \frac{m_e}{m_i} \omega_{pe} k^2 |v_0|^2 \right)^{1/3}. \quad (5.68)$$

Вследствие параметрической неустойчивости мощная электромагнитная волна в плазме может создавать достаточно сильные неоднородности ее плотности.

## § 2. Квазилинейное приближение

В неустойчивой плазме любые малые начальные возмущения, вплоть до тепловых шумов, экспоненциально нарастают со временем, и в конце концов их амплитуда достигает такой величины, что они начинают оказывать заметное влияние на макроскопические характеристики плазмы.

При развитии неустойчивости вероятны различные ситуации между двумя крайними возможностями. В одном предельном случае, когда либо плазма слабо надкритична и неустойчивость слабая, либо одна из мод колебаний сильно превалирует над другими, возможно развитие одной только моды неустойчивости. В этом случае плазма переходит в новое ламинарное движение с развившимся в ней регулярным, упорядоченным тече-

нием. В другом предельном случае в ней развивается много мод, сложно взаимодействующих между собой и требующих поэтому для своего описания статистического подхода. Второе состояние мы и будем называть турбулентным. В разреженной плазме, где механизмы диссипации играют малую роль, чаще развиваются именно турбулентные, а не ламинарные процессы.

Задача количественного описания турбулентности разбивается на две. Нужно уметь, во-первых, описывать само турбулентное движение с учетом взаимодействия отдельных мод колебаний, а во-вторых, определять влияние турбулентности на макроскопические, усредненные свойства плазмы.

Оказывается более удобным начать со второй задачи. Дело в том, что при очень слабой неустойчивости уровень развившихся шумов может быть настолько

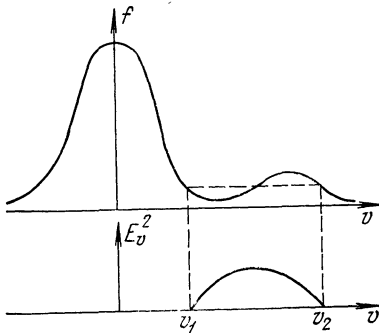


Рис. 67. Квазилинейная релаксация пучка в плазме и образование плато на функции распределения. Сплошная кривая соответствует начальной, штриховая — конечной функции распределения. Ниже функции распределения изображено распределение энергии колебаний по фазовым скоростям после установления плато

низким, что отдельные моды колебаний практически не будут взаимодействовать, т. е. их можно описывать в линейном приближении. Вместе с тем они будут оказывать какое-то воздействие на плазму, и именно это воздействие сможет остановить экспоненциальное нарастание шумов. Такой подход к описанию неустойчивостей плазмы и ее слабой турбулентности был предложен в работах Веденова, Велихова, Сагдеева [193] и Драммонда и Пайнса [194] (см. также [195]). Мы познакомимся с ним на самом простом примере возбуждения ленгмюровских колебаний размытым электронным пучком.

Допустим, что в начальный момент времени в электронной плазме имеется слабый электронный пучок с сильным разбросом частиц по скоростям. Тогда началь-

ную функцию распределения частиц по скоростям можно представить в виде рис. 67, т. е. она имеет «горб на хвосте». Как мы знаем, в такой плазме должны возбуждаться ленгмюровские колебания с такими длинами волн, чтобы их фазовая скорость  $v_{\phi} = \omega/k$  попадала в область «горба», где функция распределения имеет положительную производную, поскольку инкремент неустойчивости равен

$$\gamma_k = \frac{\pi \omega_{pe}^3}{2k^2 n} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega_k/k}. \quad (5.69)$$

Поскольку  $\gamma_k > 0$  в широкой области значений фазовых скоростей, то можно ожидать развития большого числа гармоник с широким набором различных волновых чисел.

Представим снова электрическое поле в виде

$$E(x, t) = \sum_k E_k \exp(-i\omega_k t + ikx). \quad (5.70)$$

Будем считать, что суммирование проводится как по положительным, так и по отрицательным  $k$ ; чтобы поле  $E(x, t)$  было действительным, необходимо выполнение условий

$$E_{-k} = E_k^*, \quad \omega_{-k} = -\omega_k. \quad (5.71)$$

Если гармоник очень много, то их набор будет практически случайной величиной, поэтому и поле вида (5.70) более удобно описывать с помощью случайных функций. Соответственно оказывается удобным придать сумме в (5.70) по  $k$  более определенный специфический смысл.

Предположим, что волновое число может пробегать дискретный ряд значений, например  $k = 2\pi n/L$ , где  $L$  — длина рассматриваемого плазменного образования, но величина  $2\pi/L \ll k$ , так что  $k$  почти непрерывно. Рассмотрим корреляционную функцию полей, т. е. усредненное по плазме значение от произведения полей в двух близких точках,  $\langle E(x+\xi)E(x) \rangle$ . Это выражение можно получить, умножая друг на друга две суммы вида (5.70) и затем усредняя их почленно. При таком усреднении большая часть членов двойной суммы исчезнет, останутся только те члены, в которые входит произведение

$E_k \exp [ik(x+\xi)]$  на  $E_k^* \exp(-ikx)$ . Таким образом получим

$$\langle E(x+\xi) E(x) \rangle = \sum_k |E_k|^2 \exp(ik\xi). \quad (5.72)$$

Примем теперь, что сумма в правой части (5.72) понимается в таком смысле, что сумма членов по интервалу  $\Delta k$  просто пропорциональна  $\Delta k$ . Тогда в (5.72) от суммирования можно перейти к интегрированию. Полагая для упрощения записи  $|E_k|^2 = E_k^2$  (т.е. понимая под  $E_k^2$  величину  $|E_k|^2$ ) и устремляя  $L \rightarrow \infty$ , запишем выражение (5.72) в виде

$$\begin{aligned} R(\xi) \equiv \langle E(x+\xi) E(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_k^2 \exp(ik\xi) dk = \\ &= 2 \int_0^{\infty} E_k^2 \cos k\xi dk. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Мы учли здесь, что  $E_k^2$  является четной функцией  $k$ . Из (5.73) видно, что  $E_k^2$  является фурье-компонентной корреляционной функции

$$E_k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik\xi) R(\xi) d\xi. \quad (5.74)$$

Если считать, что волновое поле  $E$  является почти стационарным, т.е. что его усредненные характеристики не меняются за очень большой промежуток времени  $T$ , так что в этом промежутке  $E_k^2$  можно считать постоянным, то с помощью (5.70) легко получить пространственно-временную корреляционную функцию

$$\begin{aligned} P(\xi, \tau) \equiv \langle E(x+\xi, t+\tau) E(x, t) \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_k^2 \exp(-i\omega_k \tau + ik\xi) dk. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Итак, если волновое поле рассматривается как набор очень большого числа гармоник и предполагается случайным, то для его описания можно пользоваться величиной  $E_k^2$ . Величина  $E_k^2 \Delta k$  имеет смысл квадрата амплитуды волнового пакета, составленного из гармоник, попадающих в интервал  $\Delta k$ . Соответственно можно

ввести величины  $N_k$ ,  $\mathcal{E}_k$ ,  $P_k$ , имеющие смысл плотности числа волн, энергии и импульса в  $k$ -пространстве.

С помощью этих величин и следует описывать процессы в слабо турбулентной плазме. В квазилинейном приближении предполагается, что взаимодействие между отдельными гармониками отсутствует. Тогда любой пакет, составленный из волн интервала  $\Delta k$ , ведет себя независимо от других, и для него можно использовать уравнение

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} + v_g \frac{\partial E_k^2}{\partial x} = 2\gamma_k E_k^2, \quad (5.76)$$

которое было получено ранее для протяженного в пространстве волнового пакета [см. (2.155)].

Перейдем теперь к рассмотрению процесса обратного влияния волн на частицы. Воспользуемся уравнением Власова для электронов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e}{m_e} E \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (5.77)$$

Представим функцию распределения электронов  $f$  в виде суммы медленно меняющейся  $f_0$  и осциллирующей части  $\tilde{f}$ . Осциллирующую часть мы будем считать малой, и поэтому для нее можно ограничиться линейным приближением. Для  $k$ -гармоники поля соответствующая гармоника  $f_k$ , очевидно, равна

$$f_k = \frac{e}{m_e} \frac{i}{\omega - kv} E_k \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (5.78)$$

(Это выражение мы уже получили при знакомстве с линейными ленгмюровскими колебаниями.) Что касается медленно меняющейся функции  $f_0$ , то для ее описания можно воспользоваться усредненным по высокочастотным колебаниям уравнением

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + v \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E_0 \frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} \langle E \tilde{f} \rangle. \quad (5.79)$$

В дальнейшем мы предположим, что усредненное поле  $E_0$  отсутствует. Член в правой части (5.79) как раз и описывает обратное влияние волн на усредненную функцию распределения. Для его вычисления мы должны подставить вместо  $E$  его выражение (5.70) в виде сум-



мы по гармоникам, и аналогичное выражение следует подставить вместо  $\tilde{f}$ . При этом вместо  $1/(\omega - kv)$  следует подставить выражение

$$\frac{1}{\omega_k - kv + i\gamma_k} = \frac{\omega_k - kv - i\gamma_k}{(\omega_k - kv)^2 + \gamma_k^2} \approx \frac{P}{\omega_k - kv} - i\pi\delta(\omega_k - kv). \quad (5.80)$$

Здесь  $\delta$ -функция получена при  $\gamma_k \rightarrow 0$ , а  $P$  означает главное значение.

При подстановке этих выражений в (5.79) находим (при  $E_0 = 0$ )

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + v \frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} D_v \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (5.81)$$

где

$$D_v = \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int E_k^2 \delta(\omega_k - kv) dk \quad (5.82)$$

(мы опять понимаем здесь под  $E_k^2$  величину  $|E_k|^2$ ). Таким образом, для  $f_0$  получается уравнение диффузионного типа в пространстве скоростей.

Уравнения (5.76), (5.81) и составляют основную систему квазилинейной теории. Рассмотрим частный случай, когда  $f_0$  и  $E_k^2$  не зависят от  $x$ . При этом в уравнениях (5.76), (5.81) можно отбросить производную по координате  $x$ . Кроме того, поскольку частота плазменных колебаний  $\omega_k \approx \omega_{pe}$  может считаться не зависящей от  $v$ , в выражении (5.82) интеграл от  $\delta$ -функции дает просто величину  $1/v$ . Далее, вместо  $E_k^2$  удобно ввести величину  $E_v^2$ , пропорциональную плотности энергии колебаний на интервал фазовых скоростей  $dv$ , т. е.

$$E_k^2 dk = E_v^2 dv = E_v^2 (\omega_{pe}/k^2) dk.$$

Тогда уравнения квазилинейной теории можно записать в виде

$$\frac{\partial E_v^2}{\partial t} = 2\gamma_v E_v^2, \quad \gamma_v = \frac{\pi v^2 \omega_{pe}}{2n} \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (5.83)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D_v \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad D_v = \frac{\pi e^2 v}{m_e^2 \omega_{pe}^2} E_v^2. \quad (5.84)$$

Учтем теперь, что плотность энергии ленгмюровских колебаний

$$\mathcal{E}_k = \frac{\partial(\varepsilon \omega)}{\partial \omega} \frac{E_k^2}{8\pi} = \frac{E_k^2}{4\pi},$$

так что

$$\mathcal{E}_v = \frac{E_v^2}{4\pi},$$

а плотность импульса

$$P_v = \frac{k}{\omega_{pe}} \mathcal{E}_v = \frac{E_v^2}{4\pi v}.$$

Заметим, что в энергию волн входит, в частности, кинетическая энергия колебаний электронов в волне, именно поэтому  $\mathcal{E}_k$  вдвое больше плотности энергии электрического поля в волне. При несколько другом описании колебаний эту энергию можно было бы включить в

$$\int \frac{m_e v^2}{2} f_0 dv.$$

С помощью (5.83), (5.84) нетрудно установить, что система квазилинейных уравнений согласована с сохранением энергии и импульса, т. е.

$$\mathcal{E} = \int \frac{m_e v^2}{2} f_0 dv + \int \frac{E_v^2}{4\pi} dv = \text{const},$$

$$P = \int m_e v f_0 dv + \int \frac{E_v^2}{4\pi v} dv = \text{const}. \quad (5.85)$$

Обсудим теперь физический смысл полученных уравнений и что они дают. Как мы видим, для функции  $f_0$  получилось уравнение диффузионного типа. Можно сказать, что всюду, где есть волны, каждая волна стремится создать локальное «плато» на функции распределения резонансных частиц, т. е. при  $\partial f_0 / \partial v > 0$  она стремится замедлить частицы. Но эти частицы создают повышенный градиент  $\partial f_0 / \partial v$  при несколько меньших скоростях и подхватываются другой волной с меньшей фазовой скоростью.

Коэффициент  $D_v$  отличен от нуля только там, где  $E_v^2 \neq 0$ . Если считать, что уровень тепловых шумов пре-

небрежимо мал, то  $D_v \neq 0$  только там, где волны успевают нарасти от теплового уровня, т. е. в области неустойчивости. Нарастая в этой области, волны приводят к диффузии частиц в сторону меньших  $v$ , и этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока во всей области неустойчивости не будет достигнуто состояние с  $\gamma \sim \sim \partial f_0 / \partial v = 0$ . Другими словами, в конечном состоянии на функции распределения  $f_0^\infty$  должно образоваться плато (см. штриховую линию на рис. 67). При этом шумы нарастут до некоторого предельного стационарного уровня, изображенного на том же рисунке. Амплитуду шумов легко найти из закона сохранения энергии. В самом деле, если при своем замедлении через точку  $v$  в сторону меньших энергий за время процесса прошло

$$\delta n = \int_0^v (f_0^\infty - f_0^0) dv$$

частиц, то в интервале  $dv$  они должны были потерять энергию  $m_e v dv \delta n$ . Эта энергия должна передаться волнам с фазовыми скоростями в интервале  $dv$ , т. е. она равна  $E_v^2 dv / 4\pi$ . Отсюда находим

$$E_v^2 = 4\pi m_e v \int_0^v (f_0^\infty - f_0^0) dv, \quad (5.86)$$

где  $f_0^0$  — начальная, а  $f_0^\infty$  — конечная функция распределения. В интеграл (5.86) область от  $v=0$  до нижней границы плато  $v_1$  фактически вклада не дает. Соотношение (5.86), разумеется, можно получить и более формальным путем с помощью уравнений (5.83), (5.84). Из (5.86) видно, что шумы сосредоточены в области, где образовалось плато, причем  $E_v^2$  плавно спадает к границам плато.

Экспериментальная проверка квазилинейной теории была проведена Робертсоном и Джентлом [196]. Эти авторы изучали эволюцию размытого электронного пучка в плазме и возбуждаемых им плазменных колебаний по длине плазменного шнура, находящегося в продольном магнитном поле. Таким образом, вместо временной эволюции системы они изучали развитие процесса по  $x$ , что не меняет качественных характеристик явления. Эволю-

ция по  $x$  может быть описана с помощью тех же уравнений (5.76), (5.81), в которых следует лишь опустить временные производные. Небольшое отличие от рассмотренной выше картины вносит также продольное магнитное поле: оно несколько изменяет закон дисперсии электронных продольных колебаний, что приводит к увеличению их групповой скорости.

Упомянутыми авторами было показано, что в условиях применимости квазилинейной теории, т. е. когда

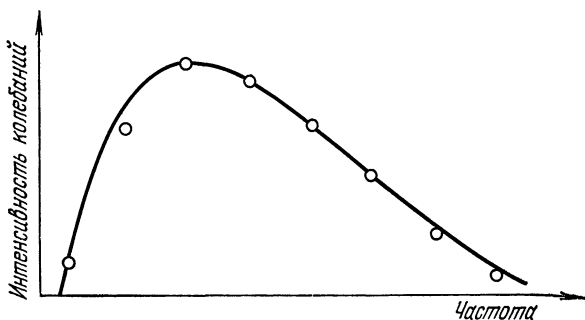


Рис. 68. Теоретический (сплошная кривая) и экспериментальный (кружки) равновесные спектры для шумов в плазме при релаксации размытого пучка

пучок слаб и уровень шумов низок, теория хорошо согласуется с экспериментом. На рис. 68, например, сравниваются теоретически рассчитанный и экспериментально измеренный спектры колебаний, возбужденных пучком. (Здесь спектр отложен не в функции фазовой скорости, а в зависимости от частоты колебаний — более удобной величины с точки зрения эксперимента, так как она непосредственно в нем измеряется.)

Квазилинейная теория легко обобщается на различные типы колебаний плазмы, но она справедлива только при очень низком уровне шумов в плазме.

### § 3. Слабая турбулентность

1. *Трехволновые процессы.* Если уровень шумов в плазме не очень мал, то квазилинейное приближение становится явно неточным, поскольку определенную роль начинают играть взаимодействия волн между собой и с

частицами. Вместе с тем если этот уровень еще не настолько велик, чтобы существенно влиять на дисперсионные свойства волн (в однородной плазме это так, если энергия шумов много меньше тепловой энергии плазмы), то турбулентный процесс в плазме можно описывать в терминах слабо взаимодействующих волн. Такая турбулентность получила название *слабой*.

Для описания слабой турбулентности можно воспользоваться теорией возмущений, т. е. можно провести разложение уравнений по малому отношению энергии взаимодействия между волнами к их полной энергии. Таким образом, в нулевом приближении по параметру взаимодействия мы просто имеем совокупность невзаимодействующих волн. В следующем приближении достаточно учесть только члены, пропорциональные энергии волн, т. е. квадратичные по амплитуде, и т. д.

С учетом теплового движения частиц квадратичными по амплитуде волн взаимодействиями являются трехволновые индуцированные процессы слияния и распада волн и индуцированное комбинационное рассеяние волн на частицах.

Рассмотрим сначала трехволновые процессы. Мы уже познакомились с ними ранее на примере взаимодействия трех выделенных волн. Те же процессы резонансного взаимодействия могут проявляться и в случае, когда в плазме возбужден очень широкий спектр волн. Если число волн очень велико, то фаза каждой отдельной волны при взаимодействии с другими волнами может сложным нерегулярным образом изменяться во времени. В этих условиях более адекватным для описания процесса является приближение случайных фаз, с которым мы также уже познакомились на примере взаимодействия трех волн. Для случая многих волн, т. е. для практически непрерывного их спектра, соответствующее приближение лишь слегка модифицируется по сравнению с отдельной триадой.

Введем в рассмотрение плотность числа волн в пространстве волновых чисел  $N_k$ , так что  $N_k dk$  есть число волн, приходящихся на интервал  $dk$ . Именно для этой величины мы должны составить уравнение, описывающее взаимодействие волн при слабой турбулентности. Опять воспользуемся уравнением (3.87) для амплитуд взаимодействующих волн. Умножая его на  $a_k$  и склады-

вая результат с комплексно-сопряженным выражением, мы получим уравнение для  $N_k = |a_k|^2$ . В приближении хаотических фаз мы интересуемся лишь медленным усредненным изменением  $N_k$  со временем. Поэтому в полученном выражении можно произвести усреднение по фазам, после чего находим

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \sum_{k'} V_{kk'k''} \langle a_k^* a_{k'} a_{k''} \rangle \times \\ \times \exp[-i(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k)t] + \text{к. с.} \quad (5.87)$$

Далее мы снова можем повторить те рассуждения, которые были проведены при рассмотрении трех взаимодействующих волн с хаотическими фазами. А именно, в выражении (5.87) в предположении полностью хаотических фаз амплитуды  $a_k$  совершенно не коррелированы, и в нулевом приближении мы получим просто нуль. Но на самом деле малая корреляция между амплитудами все же возникает в силу нелинейности самого уравнения для амплитуд (3.87). При малых  $a_k$  эта корреляция, естественно, очень слаба. Чтобы ее учесть, представим  $a_k$  в виде  $a_k^0 + \delta a_k$ , где  $a_k^0$  — основная часть амплитуды со случайной фазой (эту часть амплитуды можно считать не зависящей от времени), а  $\delta a_k$  — малая добавка, учитывающая корреляцию амплитуд. В первом приближении по корреляции уравнение (3.87) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta a_k = \sum_{k'} V_{kk'k''} a_{k'}^0 a_{k''}^0 \exp[-i(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k)t]. \quad (5.88)$$

Это уравнение можно проинтегрировать по времени от  $-\infty$  до  $t$  и в предположении, что при  $t \rightarrow -\infty$  корреляция ослабевает, т. е. в экспоненте (5.88) содержится малая добавка  $\nu t$ , тогда получим

$$\delta a_k = \sum_{k'} V_{kk'k''} a_{k'} a_{k''} \pi \delta(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k). \quad (5.89)$$

Здесь мы сохранили лишь действительную часть интеграла от экспоненты, которая только и войдет в окончательный результат, и, кроме того, опустили индекс нуль у  $a_{k'}$ ,  $a_{k''}$  в правой части.

Подставим теперь в правую часть (5.87)  $a_k^0 + \delta a_k$  вместо каждой из амплитуд  $a_k$  и сохраним только чле-

ны четвертого порядка по амплитудам. В полученном выражении все фазы можно уже считать некоррелированными, так что средние значения от четверных произведений превратятся в произведения парных корреляционных функций, т. е. выразятся через произведения  $N_k$ . Поскольку таких слагаемых много, то вся процедура выглядит несколько громоздко, однако окончательный результат после учета симметрии матричных элементов и замены суммы интегралом по  $d\mathbf{k}$  (как мы условились выше) выглядит довольно просто. Он лишь незначительно отличается от того уравнения для трех волн с хаотическими фазами, которое мы получили ранее. А именно, для волны с максимальной частотой  $\omega_k$  имеем

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \int W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (N_{\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}''} - N_k N_{\mathbf{k}'} - N_k N_{\mathbf{k}''}) \times \\ \times \delta(\omega_k - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}) d\mathbf{k}', \quad (5.90)$$

где вероятность перехода

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}\mathbf{k}''} = 2\pi V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^2. \quad (5.91)$$

Здесь матричный элемент  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}$  мы считаем действительным.

Для двух других волн уравнения выглядят аналогичным образом, в правой части изменяется лишь знак, так что  $N_k + N_{\mathbf{k}'} = \text{const}$ ,  $N_k + N_{\mathbf{k}''} = \text{const}$ .

Уравнение (5.90) можно рассматривать как кинетическое уравнение для слабой турбулентности при учете одних лишь трехволновых процессов. Оно описывает перенос энергии по спектру, т. е. в пространстве волновых чисел. Уравнение (5.90) имеет очевидное решение — распределение Рэля — Джинса  $N_k = \text{const}/\omega_k$ . Однако при наличии областей затухания такое решение не может установиться во всей области  $\mathbf{k}$ . Сток энергии в область затухания может приводить к тому, что слабая турбулентность будет обладать свойствами, сходными с сильной турбулентностью. Как было показано Захаровым [197], во многих случаях вероятности переходов  $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  в (5.90) обладают тем свойством, что для переходов с сильным изменением волнового числа они оказываются заметно меньше, чем для переходов с изменением  $k$  на величину порядка  $k$ . Вследствие этого при слабой турбулентности также может иметь место процесс эста-

фетной передачи энергии по спектру, предложенный впервые для обычной турбулентности Колмогоровым и Обуховым. С учетом условия квадратичности по  $N$  члена взаимодействия условие передачи энергии по спектру позволяет определить спектр колебаний  $\mathcal{E}_k$  без детального решения кинетического уравнения для волн.

Рассмотрим, например, случай капиллярных волн, обладающих распадным спектром колебаний  $\omega_k = \sqrt{\sigma k^3/\rho}$ . Пусть  $\mathcal{E}_k$  есть спектральная функция энергии, т. е.  $\mathcal{E}_k dk$  представляет собой энергию колебаний в интервале  $dk$  (здесь мы считаем  $k$  скаляром — числовым значением волнового вектора). Обозначим через  $\varepsilon$  поток энергии по спектру. Величина  $\varepsilon$ , очевидно, пропорциональна  $k \partial \mathcal{E}_k / \partial t$ , которая согласно кинетическому уравнению для волн должна быть пропорциональна квадрату  $\mathcal{E}_k^2$ , т. е. с учетом размерности  $\varepsilon = A \omega_k (\mathcal{E}_k k)^2 (k^2/\sigma)$ . Здесь  $\sigma/k^2$  — единственная имеющаяся в нашем распоряжении величина с размерностью энергии — добавлена нами для того, чтобы  $A$  была безразмерной константой. Отсюда находим

$$\mathcal{E}_k = \text{const} \cdot \sqrt{\varepsilon (\sigma\rho)^{1/4}} k^{-11/4}, \quad N_k \sim k^{-17/4}. \quad (5.92)$$

Этот спектр является точным решением кинетического уравнения для волн [198]. Он соответствует области инерционной нелинейной передачи энергии по спектру в сторону больших волновых чисел, где происходит диссипация энергии из-за вязкости.

Мы не будем подробно рассматривать уравнение для волн (5.90), поскольку в настоящее время на эту тему существует достаточно обширная литература (см., например, [144—150]). В частности, мы не будем останавливаться на вопросе вычисления вероятностей  $W_{kk'}$ . Отметим только, что порядок величины  $W$  в плазме можно оценить с помощью достаточно простых соображений. А именно, заметим, что правая часть в (5.90) имеет порядок величины  $WN \mathcal{E}/\omega^2$ , где  $\omega$  — характерная частота колебаний, а  $\mathcal{E} = \int \omega_k N_k dk$  — полная энергия колебаний. Если бы  $\mathcal{E}$  приблизилась к тепловой энергии плазмы  $(T_i + T_e)n$ , то можно было бы ожидать очень сильных неоднородностей порядка единицы в плазме.



При этом  $\partial N/\partial t$  было бы порядка  $\omega N$ . Поэтому по порядку величины  $W \sim \omega^3/nT$ , так что характерный масштаб темпа обмена энергией волн при трехволновом взаимодействии может быть оценен как

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{\omega \mathcal{E}}{nT}. \quad (5.93)$$

Приближение слабой турбулентности применимо только в случае  $1/\omega\tau \sim \mathcal{E}/nT \ll 1$ . Другими словами, энергия шумов должна быть значительно меньше тепловой энергии плазмы.

2. *Индукцированное рассеяние волн на частицах.* Второй процесс взаимодействия волн в плазме, который может идти в том же приближении, квадратичном по амплитуде колебаний, — это индуцированное рассеяние волн на частицах. Рассеяние происходит при выполнении резонансного условия

$$\omega_{\mathbf{k}} \pm \omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}')\mathbf{v} = 0 \quad (5.94)$$

(мы всюду ограничиваемся случаем изотропной плазмы без внешнего магнитного поля).

Как мы видели ранее в гл. 4, при этом частица попадает в резонанс с биениями двух волн на комбинационных частотах и волновых векторах. Если исходные волны имеют фазовые скорости, значительно превышающие тепловую скорость частиц, то условие резонанса (5.94) может быть выполнено только при знаке минус для комбинационных  $\omega$  и  $k$ . В этом случае мы имеем дело с комбинационным рассеянием волны на частицах, причем это рассеяние является индуцированным, т. е. его темп пропорционален интенсивности рассеянной волны.

Вероятность соответствующего рассеяния можно вычислить, пользуясь опять теорией возмущений, т. е. разложением кинетического уравнения по амплитудам волн. Мы ограничимся здесь лишь качественным обсуждением рассматриваемого процесса. Пусть  $N_{\mathbf{k}}$  и  $N_{\mathbf{k}'}$  — плотности числа волн в точках  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  фазового пространства волновых векторов. Предположим, что волны могут взаимодействовать с резонансными частицами так, что одна волна, скажем  $\mathbf{k}$ , рассеивается в  $\mathbf{k}'$ . Поскольку процесс рассеяния сходен с процессом квазилинейной диффузии частиц на биениях, то интенсивность его должна быть пропорциональна квадрату амплитуды

биений и величине  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \partial f / \partial \mathbf{v}$  в точке резонанса. Таким образом, если волн с  $\mathbf{k}'$  много, то можно написать

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}} \int P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}'} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \mathbf{v}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')) (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \\ \times \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} d\mathbf{k}'. \quad (5.95)$$

Здесь  $P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  — матричный элемент, пропорциональный вероятности рассеяния, а  $\delta$ -функция учитывает резонансный характер взаимодействия волн с частицами. Мы здесь написали только одну функцию  $f_0$ , фактически же нужно просуммировать интенсивности рассеяния на электронах и ионах.

Как мы уже упоминали в гл. 4, при рассеянии должно сохраняться число волн, так чтобы  $N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}'} = \text{const}$ . Следовательно, в аналогичном уравнении для  $N_{\mathbf{k}'}$  волна  $N_{\mathbf{k}}$  должна давать вклад в интеграл (5.95) с обратным знаком. Так как множитель  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \partial f_0 / \partial \mathbf{v}$  антисимметричен по  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ , то  $P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  должен быть симметричным, т. е.  $P_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ . Вероятность  $P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  имеет, вообще говоря, масштаб  $P \sim \omega^4 / k^2 n^2 T$ , где  $\omega$  — характерная частота,  $k$  — характерное волновое число, но, кроме того,  $P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  может содержать малые множители, если по какой-либо причине или происходит компенсация отдельных механизмов рассеяния (такая ситуация, например, имеет место при рассеянии на электронах), или фазовый объем для выполнения резонанса рассеяния оказывается очень мал (и то, и другое имеет место, например, при рассеянии на ионах при низкой их температуре).

Но по зависимости от  $N$  рассеяние на частицах имеет тот же порядок, что и трехволновые взаимодействия, и если спектр нераспадный и трехволновые процессы запрещены, то именно индуцированное рассеяние будет главным механизмом переноса энергии по спектру. Конкретные примеры таких процессов будут рассмотрены в § 4 и 5.

## § 4. Ионно-звуковая турбулентность

1. *Аномальное сопротивление плазмы.* При протекании очень сильного электрического тока через разреженную плазму часто наблюдается резкое увеличение ее сопротивления. Как правило, это сопротивление зна-

чительно превосходит величину, определяемую парными кулоновскими столкновениями. Оно возникает, например, при прохождении ударных волн поперек магнитного поля (если плазма очень разрежена и парные столкновения частиц не играют роли, то такие ударные волны называют бесстолкновительными). Часто именно повышенное, аномальное сопротивление определяет ширину и структуру бесстолкновительных волн.

Аномальное сопротивление появляется и при протекании тока вдоль магнитного поля. Оно может быть использовано в практических целях для быстрого введения в плазму энергии джоулева тепла. Такой нагрев плазмы, получивший название турбулентного, был предложен Завойским и Рудаковым в качестве очень эффективного метода введения энергии в разреженную плазму.

Подробное экспериментальное исследование турбулентного нагрева показало, что при этом в плазме возбуждаются ионно-звуковые шумы с частотами вблизи ионной плазменной частоты  $\omega_{pi}$ . Электроны в таких условиях набирают энергию от внешнего электрического поля гораздо быстрее ионов (просто потому, что электроны намного легче), и условия для возбуждения ионного звука легко выполняются (электронная температура значительно превышает ионную, а направленная дрейфовая скорость электронов превышает скорость звука).

Согласно (5.43) инкремент раскачки ионно-звуковых колебаний при протекании электрического тока по порядку величины составляет

$$\gamma \sim \omega \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left( \frac{u}{c_s} \cos \theta - 1 \right), \quad (5.96)$$

где  $u$  — дрейфовая скорость электронов, а  $\theta$  — угол между направлением скорости  $\mathbf{u}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  ионно-звуковой волны. Как мы видим, неустойчивость начинается, когда токовая скорость превышает скорость звука. При этом инкремент неустойчивости мал по сравнению с частотой, так что есть основания для справедливости приближения слабой турбулентности.

Допустим, что условие неустойчивости  $u > c_s$  выполнено, и рассмотрим, что должно происходить с электронами с точки зрения квазилинейной теории. Как мы знаем, отдельная волна или группа распространяющихся

ся в одну сторону волн стремятся создать «плато» на функции распределения вдоль направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ . На рис. 69 штриховые кривые показывают, как расположатся линии  $f = \text{const}$  в пространстве скоростей при наличии волны с фазовой скоростью, много

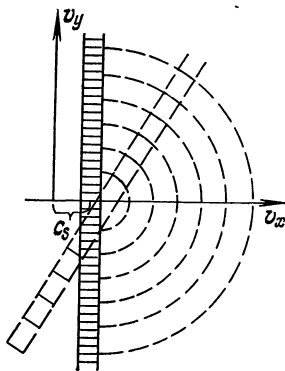


Рис. 69. Квазилинейная изотропизация электронной функции распределения на ионно-звуковых волнах

меньшей тепловой. Если таких волн много и они заполняют целый сектор, то в первом приближении, т. е. в пренебрежении  $c_s$  по сравнению с  $v_{Te}$ , они стремятся изотропизовать функцию распределения, как это видно на рис. 69. Если же учесть, что каждая из полос плато на рис. 69 сдвинута на  $c_s$  от начала координат, то понятно, что в квазилинейном приближении ионно-звуковые волны стремятся изотропизовать функцию распределения, допуская только ее сдвиг на  $u \sim c_s$ .

Таким образом, уже квазилинейный эффект — самый сильный при малом уровне шумов — приостанавливает неустойчивость; при этом он ограничивает направленную скорость электронов величиной порядка  $c_s$ , т. е. ток в плазме ограничивается величиной

$$j \approx enc_s. \quad (5.97)$$

Если мы вспомним выражение для проводимости  $\sigma = e^2 n / m_e \nu_e$ , где  $\nu_e$  — частота электрон-ионных столкновений, то можно сказать, что при наличии ионно-звуковых шумов эффективно повышается частота электрон-ионных столкновений. Сравнивая выражение (5.97) с формулой  $j = \sigma E$ , можно сказать, что эффективная частота столкновений электронов с ионно-звуковыми шумами

при их очень низком уровне дается выражением

$$v_{ef} \approx \frac{eE}{u_c m_e} \approx \frac{eE}{c_s m_e}, \quad (5.98)$$

где  $u_c \approx c_s$  — критическая скорость, при которой начинается раскочка ионного звука. Выражения (5.97), (5.98) играют роль закона Ома для турбулентного сопротивления в области значений  $E$ , не сильно превышающих критическое  $E_c = u_c m_e v_{ef} / e$ .

При увеличении  $E$  уровень шумов повышается, и при достаточно большой плотности энергии шумов  $\mathcal{E}$  квазилинейное приближение станет неприменимым, так как в игру вступят процессы более высокого порядка по  $\mathcal{E}$ .

Ионный звук обладает нераспадным спектром, поэтому трехволновые процессы отсутствуют. Следовательно, главную роль в формировании ионно-звуковых спектров должны играть процессы индуцированного рассеяния на частицах, а именно на ионах. Как формируется спектр, мы рассмотрим позднее, а здесь обсудим вопрос о влиянии переноса энергии по спектру на величину аномального сопротивления.

Оценим прежде всего значение эффективной частоты столкновений  $v_{ef}$ . Оно определяется скоростью рассеяния электронов на флуктуациях поля ионно-звуковых волн. Так как шумы возбуждаются в области длин волн порядка дебаевской, то при энергии шумов  $\mathcal{E} \sim nT$  можно ожидать эффективной частоты  $v_{ef} \sim kv_{Te} \sim \omega_{pe}$ , где  $v_{Te}$  — тепловая скорость электронов. При меньших значениях  $\mathcal{E}$  частота столкновений будет убывать линейно с  $\mathcal{E}$  (так как скорость рассеяния на флуктуациях согласно квазилинейной теории квадратична по амплитуде шумов). Таким образом, по порядку величины

$$v_{ef} \sim \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{nT}. \quad (5.99)$$

Что касается темпа индуцированного рассеяния волн на ионах, то он также пропорционален  $\mathcal{E}$  и грубо, по порядку величины, если отвлечься от зависимости от  $T_i/T_e$ , может быть оценен как  $\omega_{pi} \mathcal{E} / nT$ . Таким образом, равновесие накачки волн из-за неустойчивости и их уноса по спектру из-за рассеяния на ионах достигается при

$$\frac{\omega_{pi} \mathcal{E}}{nT} \approx v \approx \omega_{pi} \frac{u}{c_s} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}.$$

Так как согласно (5.99)  $u = eE/m_e v_{ef} \sim nT/\mathcal{E}$ , то получаем

$$\frac{\mathcal{E}}{nT} \approx \left( \frac{m_i E^2}{m_e \cdot 8\pi n T} \right)^{1/4}, \quad j \approx en v_{Te} \left( \frac{E^2}{8\pi n T} \right)^{1/4}. \quad (5.100)$$

Второе из этих выражений играет роль закона Ома при сильных электрических полях,  $E^2 > 8\pi n T m_e^2/m_i^2$ , когда происходит переход от (5.97) к (5.100). Разумеется, выражение (5.100) справедливо только при  $u < v_{Te}$ , так как в противном случае все электроны перейдут в режим свободного ускорения.

Следует заметить, что точной теории аномального сопротивления плазмы пока нет и еще рано говорить о полном согласии теории и эксперимента. Имеется лишь качественное соответствие между выводами теории слабой турбулентности и экспериментом для тока поперек магнитного поля (например, в бесстолкновительных ударных волнах). При протекании тока вдоль магнитного поля картина турбулентного нагрева сильно усложняется из-за электронных пучков, которые рождаются в турбулентной области и не могут быть приостановлены ионно-звуковыми шумами низкого уровня.

2. *Спектр ионно-звуковой турбулентности.* Обсудим теперь вопрос о спектральном составе ионно-звуковой турбулентности, т. е. о зависимости  $\mathcal{E}_k = c_s k N_k$  от волнового числа. Как мы уже упомянули выше, частотный спектр ионного звука (зависимость  $\omega_k$  от  $k$ ) является нераспадным. Поэтому перенос энергии в пространстве волновых чисел определяется рассеянием волн на ионах. Соответствующий процесс мы обсуждали в § 3, его кинетика описывается уравнением (5.95). Как мы видели, при рассеянии соблюдается условие резонанса  $\omega_k - \omega_{k'} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$ . Здесь скорость частицы имеет порядок величины тепловой скорости ионов  $v_{Ti}$ , а разность  $\omega_k - \omega_{k'} \approx c_s \Delta k$ , где  $\Delta k = k - k'$ . Так как  $v_{Ti}/c_s = \sqrt{T_i/T_e} \ll 1$  то  $\Delta k \sim k \sqrt{T_i/T_e} \ll k$  (если  $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \sim k$ ). Таким образом, рассеяние идет с малым изменением абсолютного значения волнового числа. Такой перенос энергии по спектру принято называть дифференциальным. Так как при перекачке в данный интервал волновых чисел вблизи значения  $k$  «кванты» приходят из области  $k + \Delta k$  и уходят из него в область  $k - \Delta k$ , то процесс переноса принимает характер потока в  $k$ -пространстве с интен-

сивностью  $\sim \Delta k \partial N_k / \partial k$ . (Здесь  $N_k$  считается плотностью числа волн на интервал  $dk$  абсолютных значений волновых чисел, так что  $d\mathcal{E} = c_s k N_k dk$ .) Если учесть еще, что при рассеянии число волн сохраняется, а энергия убывает пропорционально частоте, то уравнение (5.95) по порядку величины примет вид

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial k}(P k^4 N_k^2) = 2\gamma_k N_k. \quad (5.101)$$

Здесь мы справа добавили член, описывающий накачку волн из-за неустойчивости. Величина  $P$ , пропорциональная вероятности рассеяния, как показывает расчет, приближенно равна  $(T_i/T_e)(c_s^2/nT) \cdot 2\pi\theta^2$ , где  $\theta^2$  — средний квадрат углового распределения ионно-звуковых колебаний. Инкремент  $\gamma_k$  согласно (5.96) пропорционален  $k$ :  $\gamma \approx \sqrt{m_e/m_i} \omega$ . Таким образом, стационарное уравнение (5.101) при  $\partial N_k / \partial t = 0$  принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial k} k^2 N_k = \frac{\gamma_k}{P k^2} \sim \frac{1}{k}. \quad (5.102)$$

Учитывая, что  $\gamma_k$  обращается в нуль в области  $k \sim k_0 = 1/d$ , мы получим приближенное решение

$$N_k \sim \frac{1}{k^2} \ln \frac{k_0}{k}. \quad (5.103)$$

Таким образом, энергия шумов

$$\mathcal{E}_k = \omega_k N_k \sim \frac{1}{k} \ln \frac{k_0}{k}$$

оказывается большей в области малых  $k$ , хотя наиболее интенсивная накачка за счет неустойчивости производится у верхней границы волновых чисел, т. е. при  $k \sim k_0 = 1/d$ .

Спектр, задаваемый выражением (5.103), удовлетворительно согласуется с экспериментально измеренным в бесстолкновительной ударной волне [216]. Таким образом, имеется качественное соответствие между экспериментами и теорией слабой ионно-звуковой турбулентности. Однако о полном количественном согласии теории и эксперимента говорить пока рано: и теория не является точной, и эксперименты очень грубы и неоднозначны.

## § 5. Ленгмюровская турбулентность

1. *Слабая ленгмюровская турбулентность.* В разреженной плазме нередко возникают такие условия, при которых происходит возбуждение электронных ленгмюровских колебаний. Например, такие колебания могут возбуждаться при прохождении через плазму электронных пучков. Легко возбуждаются электростатические колебания при взаимодействии с неоднородной плазмой мощных электромагнитных волн (например, лазерного излучения). Такие волны испытывают отражение от критической области, где плазменная частота  $\omega_{pe}$  совпадает с частотой излучения, и вблизи этой точки электромагнитная волна легко трансформируется в плазменную.

Возбужденные до определенного уровня ленгмюровские колебания начинают взаимодействовать с частицами, и благодаря этому их спектры (распределение энергии по волновым числам) эволюционируют со временем. Развивающиеся во времени нерегулярные ленгмюровские колебания естественно назвать ленгмюровской турбулентностью.

Если уровень шумов низкий, то турбулентность слабая, и для ее описания достаточно учесть лишь главные по интенсивности шумов механизмы нелинейного взаимодействия. Как мы знаем, частота ленгмюровских волн равна  $\omega_k = \omega_{pe} + 3T_e k^2 / 2m_e \omega_{pe}$ , где тепловая поправка к частоте  $\omega_{pe}$  в области малых волновых чисел ( $kd \ll 1$ ) мала. Таким образом, ленгмюровские колебания обладают нераспадным спектром (мы не можем удовлетворить равенству  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ ). Следовательно, в квадратичном по интенсивности приближении имеется только один нелинейный механизм перекачки энергии по спектру — индуцированное рассеяние волн на электронах и ионах.

При рассеянии число волн сохраняется, а энергия  $\mathcal{E}_k = \omega_k N_k$  при максвелловском распределении частиц по скоростям может только уменьшаться. Таким образом, при рассеянии на частицах волновое число плазмонов, т. е. ленгмюровских волн, должно уменьшаться. Темп такого «покраснения» ленгмюровских плазмонов можно попытаться оценить, исходя из соображений размерности. Так как темп перекачки энергии по спектру



должен быть пропорционален интенсивности, а безразмерной характеристикой интенсивности является величина  $\mathcal{E}/nT$  (отношение энергии шумов к тепловой), то, казалось бы, темп должен определяться величиной  $\omega_{pe} \mathcal{E}/nT$ . Однако это, скорее, верхний предел для темпа перекачки, потому что мы выбрали здесь максимальную частоту  $\omega_{pe}$  в качестве возможной характерной частоты процесса. В действительности количественное рассмотрение показывает, что перекачка энергии по спектру протекает гораздо медленнее. А именно, при рассеянии на электронах она определяется величиной

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{pe} (kd)^3 \frac{\mathcal{E}}{nT}, \quad (5.104)$$

где  $d$  — дебаевский радиус экранирования.

Дополнительный малый множитель  $(kd)^3$  возникает из-за того, что при рассеянии волн на электронах происходит экранировка электрического поля электронов скоррелированной с ними электронно-ионной «шубой». В результате амплитуда рассеянных волн падает, так как «шуба» колеблется вместе с электроном, а ее заряд положителен.

При рассеянии на ионах эффект экранировки значительно меньше, так как «шуба» легче иона. Но зато при этом законом «сохранения энергии» в акте рассеяния на величину изменения волнового числа плазмона накладываются определенные ограничения:  $\omega_k - \omega_{k'} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{v}$ . Здесь  $\mathbf{v}$  имеет порядок величины тепловой скорости ионов  $v_{Ti}$ , так что при углах между направлениями  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  порядка единицы правая часть имеет порядок величины  $kv_{Ti}$ . Левая же часть имеет порядок величины  $\omega_k - \omega_{k'} \sim k dv_{Te} \Delta k$ , где  $\Delta k = k - k'$ . Таким образом,

$$\Delta k \sim \frac{1}{kd} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$$

Следовательно, в области не очень малых волновых чисел,  $kd > \sqrt{m_e/m_i}$ , перекачка по спектру носит дифференциальный характер, и характерное время изменения волнового числа на величину порядка его самого оказывается также больше, чем оцененное по соображениям размерности. А именно,

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{pe} \left( \frac{\Delta k}{k} \right)^2 \frac{\mathcal{E}}{nT} \sim \frac{\omega_{pe} m_e}{m_i (kd)^2} \frac{\mathcal{E}}{nT}. \quad (5.105)$$

Сравнивая (5.104) и (5.105), мы видим, что при достаточно малых  $kd$  преобладающим механизмом перекачки энергии плазмонов по спектру является рассеяние на ионах.

Итак, при слабом уровне возбуждения ленгмюровские волны рассеиваются на частицах плазмы, и при этом волновые числа колебаний убывают. Но число волн при таком рассеянии сохраняется, т. е.  $N_k = \text{const}$ . Отсюда следует одна очень интересная особенность рассматриваемого процесса. А именно, так как энергия  $\mathcal{E}_k = \omega_k N_k = [\omega_{pe} + 3/2 (kd)^2 \omega_{pe}] N_k$  и при рассеянии уменьшается только небольшая тепловая поправка к частоте, то основная часть энергии ленгмюровских колебаний при рассеянии сохраняется. Другими словами, энергия ленгмюровских волн почти без потерь перекачивается в область  $k \rightarrow 0$ , и, стало быть, индуцированное рассеяние приводит к образованию «конденсата» ленгмюровских колебаний в области исчезающе малых  $k$ .

Если накачка — например, электронным пучком — продолжает свое действие, то энергия конденсата будет расти со временем. Но ленгмюровские колебания с малыми волновыми числами и достаточно большой плотностью энергии неустойчивы по отношению к самосжатию, т. е. к собиранию в сгустки ленгмюровских волн типа солитонов. Как было показано Веденовым и Рудаковым [220], конденсат ленгмюровских плазмонов неустойчив по отношению к самосжатию при  $\mathcal{E}/nT > (kd)^2$ , где  $k$  — характерное волновое число конденсата. Можно сказать, что при этом нелинейная добавка к частоте  $\delta\omega \sim (\mathcal{E}/nT) \omega_{pe}$  (например, из-за модуляции плотности  $\delta n/n \sim \mathcal{E}/nT$ ) становится больше тепловой поправки к частоте. Так как при индуцированном рассеянии на частицах волновое число убывает, то рано или поздно будет достигнута область настолько малых  $k$ , что однородные ленгмюровские колебания потеряют устойчивость. Вследствие этого ленгмюровские колебания начнут собираться в сгустки типа ленгмюровских солитонов. Соответствующая турбулентность, строго говоря, должна классифицироваться как сильная, поскольку при этом теряет смысл использование теории возмущений для описания нелинейных процессов.

2. *Сильная турбулентность, коллапс ленгмюровских волн.* Итак, предположим, что вследствие рассеяния на частицах образуется ленгмюровский конденсат, т. е. длинноволновые колебания достаточно большой интенсивности. Если эти колебания не затухают слишком быстро (например, из-за столкновений или трансформации продольных колебаний в поперечные с последующим их излучением), то их интенсивность может достигнуть величины  $\mathcal{E} > (kd)^2 nT$ , и тогда в игру вступит модуляционная неустойчивость.

Напомним, что физический механизм этой неустойчивости связан с образованием области с пониженной плотностью, или «каверны», в которой собираются ленгмюровские колебания и тем самым еще больше снижают плотность своим высокочастотным давлением. Образование таких «кавитонов», т. е. нестационарных ленгмюровских сгустков, наблюдалось экспериментально Кимом и др. [228]. В этой работе исследовалось распространение электромагнитных волн в неоднородной плазме с частотой, близкой к ленгмюровской. Волна распространялась в сторону возрастающей плотности, немного

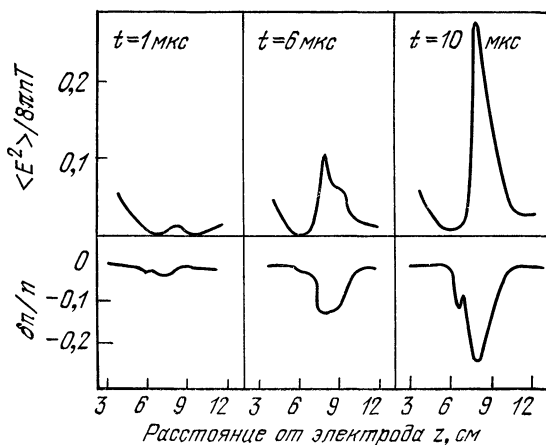


Рис 70. Образование «кавитонов» в области плазменного резонанса

не доходя до резонансной точки, где частота волны сравнивалась с локальной ленгмюровской частотой, происходила отсечка и волна отражалась обратно. В самой точке резонанса раскачивалась продольная ленгмюров-

ская волна, которая вытесняла плазму и создавала себе локальную «яму». Нарастание поля и образование «полости» показано на рис. 70.

Естественно предположить, что и в ленгмюровском конденсате должно происходить образование такого рода высокочастотных сгустков, т. е. локализованных волновых пакетов. С одномерными образованиями подобного рода — ленгмюровскими солитонами — мы познакомились в гл. 3. Напомним, что при наличии малого возмущения плотности  $\delta n$  частота колебаний

$$\omega_k = \omega_{p0} \left( 1 + \frac{\delta n}{2n} \right) + \frac{3T_e k^2}{2m_e \omega_{p0}},$$

где  $\omega_{p0}$  — невозмущенная ленгмюровская частота. Если мы запишем электрическое поле в виде  $E \exp(-i\omega_{p0}t) + \text{к. с.}$ , где  $E$  — медленно меняющаяся функция времени и координат, то дисперсионному уравнению  $\omega - \omega_k = 0$  можно сопоставить уравнение

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{3T_e}{2m_e \omega_{p0}} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\omega_{p0}}{n} \delta n E. \quad (5.106)$$

В самом деле, если подставить сюда поле  $E$  в виде плоской волны  $E = \exp[-i(\omega - \omega_{p0})t + ikx]$ , то мы получим использованное нами дисперсионное уравнение. Следовательно, любая суперпозиция собственных колебаний удовлетворяет уравнению (5.106). Величина  $\delta n$  определяется из уравнений медленного движения плазмы. Если это движение является дозвуковым, то  $\delta n$  определяется равновесием между силой Миллера со стороны высокочастотного поля и градиентом давления плазмы, т. е. согласно (3.77) в изотермической плазме

$$\frac{\delta n}{n} = - \frac{\langle E^2 \rangle}{16\pi n T} = - \frac{E^2}{32\pi n T}, \quad (5.107)$$

где через  $E^2$  обозначен  $|E|^2$ .

Уравнения (5.106), (5.107), как было показано в гл. 3, имеют решения типа солитонов, бегущих или стоячих. При этом согласно (3.79) ширина солитона  $\Delta$  связана с его амплитудой соотношением  $E_0 \Delta = \text{const}$ , т. е. солитон тем уже, чем больше его амплитуда. Энергия солитона  $\mathcal{E} \sim E_0^2 \Delta \sim E_0 \sim 1/\Delta$ .

Если ленгмюровские колебания были бы строго одномерными, то можно было бы ожидать, что ленгмю-

ровский конденсат разобьется на совокупность солитонов различной интенсивности. Такая солитонная модель ленгмюровской турбулентности, учитывающая взаимодействие между собой солитонов различной амплитуды, удовлетворительно согласуется с результатами численного моделирования одномерной ленгмюровской турбулентности. Но, по-видимому, более реальной является трехмерная картина.

В самом деле, оказывается, что плоские одномерные солитоны неустойчивы по отношению к трехмерным возмущениям. Соответствующую неустойчивость приближенно можно описать на языке волновых пакетов, как это мы сделали при рассмотрении поперечных колебаний обычных солитонов в § 3 гл. 3. А именно, предположим, что мы имеем плоский покоящийся ( $k_0=0$ ) ленгмюровский солитон, амплитуда которого  $E_0$  является медленной функцией координаты  $y$ . Тогда и частота  $\nu_0$ , равная согласно (3.79)

$$\nu_0 = \frac{\alpha E_0^2}{2} = -\frac{\omega_{p0}}{128\pi nT} E_0^2, \quad (5.108)$$

будет медленно меняющейся функцией  $y$ . Следовательно, и фаза будет зависеть от  $y$ , так что со временем будет появляться  $y$ -компонента волнового вектора со скоростью

$$\frac{\partial k_y}{\partial t} = -\frac{\partial \nu_0}{\partial y} = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial E_0^2}{\partial y}. \quad (5.109)$$

Появление  $k_y$  означает, что появляется  $y$ -компонента групповой скорости  $v = v'_r k_y$ , которая будет переносить энергию колебаний вдоль солитона. По аналогии с уравнениями для волновых пакетов перенос энергии вдоль солитона можно описать уравнением

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v\mathcal{E}) = 0. \quad (5.110)$$

Учитывая, что  $\alpha < 0$ ,  $k_y = v/v'_r$  и  $\mathcal{E} \sim E_0$ , мы можем переписать уравнение (5.109) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} - q \frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial y} = 0, \quad (5.111)$$

где  $q$  — некоторая положительная константа.

Но теперь видно, что уравнения (5.110), (5.111) напоминают уравнения гидродинамики с плотностью  $\mathcal{E}$  и давлением  $p = -q\mathcal{E}^2$ , убывающим с ростом плотности. Ясно, что при возмущении  $\mathcal{E}$  вдоль  $x$  от его начального значения  $\mathcal{E}_0$  давление понизится там где  $\mathcal{E}$  станет больше, и возмущение будет нарастать со временем. Энергия  $\mathcal{E}$  стремится собраться в сгустки вдоль оси  $y$ . Это явление схлопывания энергии колебаний в отдельные маленькие сгустки, обнаруженное впервые Захаровым, называется коллапсом ленгмюровских волн.

Нетрудно видеть, что коллапс происходит за конечный промежуток времени. В самом деле, пусть  $L$  есть характерная длина сгустка. В силу закона «сохранения энергии»  $\mathcal{E}L = \text{const}$  величина  $\mathcal{E}$  возрастает при уменьшении  $L$  как  $1/L$ , а скорость  $v$  по порядку величины равна  $\dot{L}$ . Таким образом, уравнение (5.111) грубо можно записать как  $\dot{L} + q\mathcal{E}_0^2 L_0^2/L^3 = 0$ . Отсюда видно, что  $L \sim (t_0 - t)^{1/2}$ . Так как  $\Delta \sim 1/\mathcal{E} \sim L$ , то при продольном сжатии вдоль  $y$  солитон становится тоньше, так что фактически при двумерном коллапсе энергия ленгмюровских солитонов схлопывается в тонкую нить. Более точно картина коллапса была рассчитана численно. Один из примеров коллапса приведен на рис. 71.

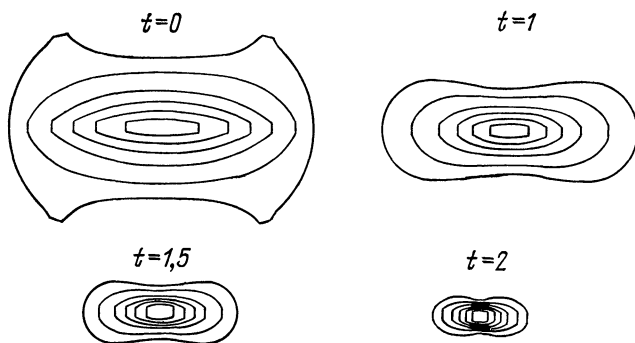


Рис 71. Линии постоянного  $E^2$  при коллапсе ленгмюровских волн

Если энергия ленгмюровских волн достаточно велика,  $E^2/8\pi > (m_e/m_i)nT$ , то коллапс становится сверхзвуковым. При этом образование «каверны» несколько замедляется, но коллапсирование не прекращается, и

опять энергия ленгмюровских колебаний схлопывается в «точку» за конечный промежуток времени.

Разумеется, физическая бесконечность плотности энергии в коллапсе не достигается: просто при достаточно высокой интенсивности ленгмюровских колебаний они поглощаются либо на тепловых частицах механизмом затухания Ландау, либо из-за пересечения траекторий в нелинейных колебаниях.

Таким образом, можно себе представить следующую картину ленгмюровской турбулентности в однородной плазме. При накачке волн в диапазоне волновых чисел вблизи обратного дебаевского радиуса энергия перекачивается в область малых  $k$  вследствие индуцированного рассеяния на электронах и ионах. При такой перекачке энергия ленгмюровских волн изменяется незначительно, так что в области малых  $k$  образуется ленгмюровский конденсат. Когда плотность энергии этого конденсата  $\mathcal{E}$  превышает величину  $(kd)^2 nT$ , начинается образование коллапсирующих сгустков, которые создают сток энергии ленгмюровских колебаний в частицы.

Ленгмюровская турбулентность может создаваться при взаимодействии с плазмой электронных пучков или мощных электромагнитных волн. В настоящее время изучение такого рода коллективных процессов в плазме составляет предмет обширных и тщательных экспериментальных и теоретических исследований.

## § 6. МГД-турбулентность

Если плазма магнитогидродинамически неустойчива, то в ней возможно возбуждение сравнительно медленных крупномасштабных движений, которые могут быть описаны в рамках МГД-приближения. Эти течения напоминают обычные течения жидкости или газа, усложненные лишь действием объемной силы Ампера. Если механизмы диссипации достаточно слабы, то эти течения приобретают турбулентный характер.

Как известно, в обычной жидкости спектр возможных турбулентных состояний весьма широк. Но все же грубо их можно разделить на два класса — турбулентные потоки и турбулентную конвекцию. В турбулентных потоках нерегулярности в скорости создаются макроскопическим потоком, точнее сдвигом скорости этого пото-

ка. При турбулентной конвекции основным механизмом передачи энергии в пульсации является работа сил тяжести над неустойчиво стратифицированным газом или жидкостью.

Аналогично и в магнитной гидродинамике можно различать разные типы — потоковые и конвективные — турбулентных движений, в зависимости от источников энергии, подпитывающих эту турбулентность. Что касается турбулентных потоков, то они могут возникать, например, в МГД-генераторах, преобразующих тепловую энергию в электрическую, где плазма обычно слабо ионизована. Другой пример мощных турбулентных течений представляют собой движения межзвездного газа и космических облаков. Так как мы в основном обсуждали только лабораторную высокотемпературную плазму, то мы не будем здесь останавливаться на турбулентных потоках, а сосредоточим внимание на турбулентной конвекции.

Турбулентная конвекция или аномальная диффузия в плазме может развиваться на различных модах колебаний неоднородной плазмы. Полной и ясной картины того, при каких условиях должны преобладать те или иные механизмы коллективных переносов в плазме, пока нет. Поэтому мы рассмотрим здесь только два примера возбуждения одножидкостной МГД-турбулентности конвективного типа, причем в одном из примеров турбулентность поддерживается только за счет тепловой энергии плазмы, а во втором — также и за счет энергии магнитного поля.

1. *Желобковая турбулентность.* Желобковая турбулентность развивается в простых зеркальных ловушках (без минимума  $B$ ) из-за желобковой неустойчивости. Эта турбулентность была детально исследована в работах Иоффе с сотрудниками [159, 160] на установке «ионный магнетрон».

На этой установке изучалось удержание плазмы с горячими ионами, создаваемой путем ускорения ионов радиальным электрическим полем. Поле прикладывалось между шнуром холодной плазмы, проходящим по оси ловушки, и металлическими стенками вакуумной камеры в виде одиночного импульса длительностью 30 мкс. По окончании импульса и при одновременном прекращении «подачи» холодной плазмы ловушка ока-



зывалась заполненной высокотемпературной плазмой с плотностью порядка  $10^9$  см<sup>-3</sup>, средней энергией ионов около 1 кэВ и температурой электронов около 20 эВ. Далее исследовался свободный распад такой плазмы.

В случае отсутствия каких-либо неустойчивостей распад должен был бы определяться перезарядкой быстрых ионов на остаточном газе. В условиях этих экспериментов время перезарядки составляло несколько миллисекунд. Однако измерения зависимости плотности плазмы от времени по потоку нейтралов перезарядки показали, что распад протекал с существенно меньшим характерным временем порядка  $10^{-4}$  с, т. е. имели место аномально большие потери плазмы, значительно превышающие перезарядочные. Непосредственными измерениями токов, текущих из плазмы на стенки камеры, было показано, что плазма гибнет на боковых стенках камеры. Было установлено также, что поток плазмы на отдельные элементы стенки носит характер нерегулярных во времени выбросов, хорошо скоррелированных вдоль магнитных силовых линий. Другими словами, плазма выбрасывалась на стенку в виде отдельных «язычков», простирающихся на всю длину ловушки.

Все эти факты недвусмысленно свидетельствовали о желобковой природе неустойчивости, вызывающей потери плазмы. Однако оставался не вполне ясным сам механизм переноса плазмы. Дело в том, что экспериментально измеренное время удержания во много раз превышало теоретически предсказанное время развития неустойчивости, да и его зависимость от напряженности поля и энергии ионов была совсем другой. Эти вопросы получили разрешение в рамках представлений о турбулентной конвекции плазмы [163].

Чтобы представить себе механизм переноса плазмы на боковые стенки, следует учесть, что соприкасающаяся с металлической стенкой плазменная трубка не может сразу погибнуть. Это связано с тем, что в тонком пристеночном слое плазмы толщиной порядка среднего ларморовского радиуса ионов поперечные электрические поля должны быть очень малы: из этого слоя избыточные ионы могут сравнительно свободно уходить на боковые стенки, а электроны — вдоль силовых линий, так что флуктуации заряда рассасываются. А это и означает, что вблизи стенки движение плазмы по радиусу должно при-

тормаживаться: ведь оно связано с азимутальной компонентой электрического поля, которая вблизи стенки (а тем более на самой стенке) должна отсутствовать. Вследствие этого перенос плазмы на стенку принимает характер конвекции: приходящие к стенке трубки могут потерять только часть своей плазмы, а после этого они будут вытеснены внутрь ловушки другими, более плотными трубками. Если обозначить через  $\xi$  долю теряемой при соприкосновении со стенкой плазмы, то вблизи стенки следует ожидать флуктуаций плотности  $n' \sim \xi n$ , где  $n$  — средняя плотность.

Вблизи самой стенки перенос плазмы при турбулентной конвекции производится пульсациями минимального масштаба  $l \sim \rho_i$ . Скорость этих пульсаций  $v'$  возникает вследствие архимедовой силы всплывания обедненных плазмой трубок и определяется балансом кинетической и потенциальной энергий:  $v'^2 \sim gln'/n \sim g\rho_i\xi$ , где эффективное «ускорение силы тяжести»  $g$  дается выражением (5.8). Следовательно, поток плазмы на стенку  $q = \langle n'v' \rangle = A\xi^{3/2}n(\rho_i g)^{1/2}$ , где  $A$  — числовой коэффициент порядка единицы. По мере удаления от стенки на расстояние  $x$  в игру вступают пульсации все большего масштаба вплоть до  $l \sim x$ , так что эффективный коэффициент диффузии быстро возрастает и плотность в глубине ловушки будет близка к плотности вблизи стенки. Поэтому в выражении для  $q$  под  $n$  можно подразумевать среднюю плотность в ловушке, переопределив соответствующим образом константу  $A$ . Отсюда, зная радиус камеры  $a$ , с учетом (5.8) находим время жизни  $\tau = \pi a^2 n / 2\pi a q$ :

$$\tau = Ca \left( \frac{Rm_i}{\rho_i T} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\Omega_i^2}{\omega_{\rho_i}^2} \right)^{1/2}, \quad (5.112)$$

где  $T$  — средняя энергия ионов,  $C$  — числовой множитель порядка единицы при  $\xi = \text{const} \sim 1/2$ .

Выражение (5.112) удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными по измерению времени жизни плазмы. В качестве примера можно привести сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей времени жизни плазмы от плотности (рис. 72). На рис. 73 приведено распределение плотности по радиусу, из которого видно, что плазма действительно «выливается» на периферию ловушки и притормаживается около внешней стенки.

Дальнейшее экспериментальное подтверждение представлений о турбулентной конвекции разреженной плазмы было получено при более детальном изучении пространственных и временных характеристик плазменных пульсаций. Такие сведения были получены с помощью системы миниатюрных ленгмюровских зондов, не внося-

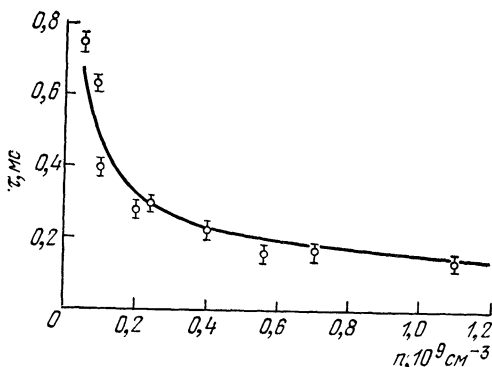


Рис. 72. Теоретическая (сплошная кривая) и экспериментальная (кружки) зависимости времени жизни плазмы (за вычетом перезарядочных потерь) от ее плотности

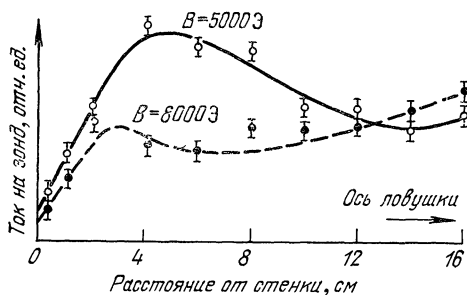
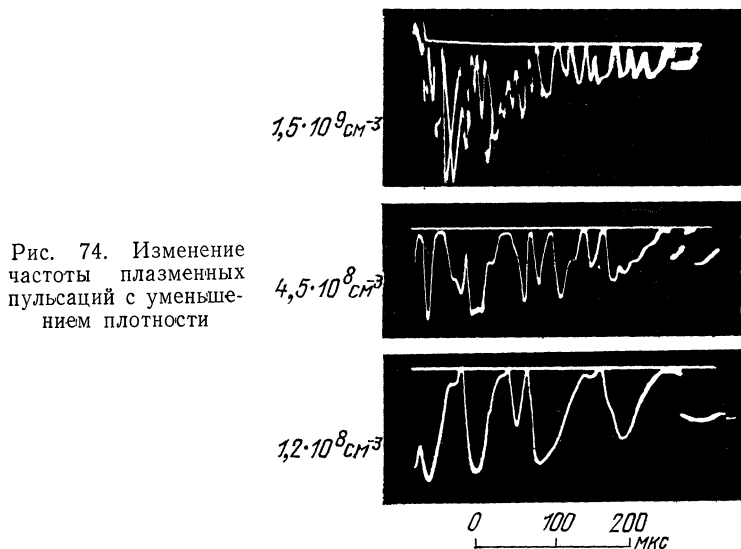


Рис 73. Радиальное распределение плотности плазмы в ловушке

ших заметных возмущений в плазму. О локальных колебаниях плотности плазмы можно судить по колебаниям ионного тока насыщения на соответствующий зонд, а по корреляции токов на несколько зондов, удаленных друг от друга на известные расстояния, можно оценить размеры плазменных неоднородностей. Было выяснено,

что в пристеночной области плазмы существует широкий спектр глубоко промодулированных нерегулярных колебаний длительностью от нескольких до десятков микросекунд. Высокочастотная часть спектра связана с мелко-масштабными колебаниями около 3—4 см, длина волны которых близка к ларморовскому диаметру ионов.

По мере перехода к более глубоким слоям плазмы амплитуда мелкомасштабных пульсаций, как и следовало ожидать, резко убывает и остается лишь низкочастотная составляющая, связанная с пульсациями масштаба порядка поперечных размеров ловушки. В центральной области ловушки наблюдается очень слабая низкочастотная модуляция зондовых сигналов, что указывает на отсутствие здесь значительных возмущений плотности. Такая картина качественно хорошо согласуется с моделью турбулентного переноса плазмы поперек магнитного поля. При уменьшении плотности, когда  $\omega_{pi}$  становится меньше  $\Omega_i$ , следует ожидать замедления процесса



конвекции, что и наблюдается экспериментально, как показано на рис. 74 (значение плотности указано слева от каждой осциллограммы).

Таким образом, все экспериментальные данные по поведению плазмы в обычной адиабатической ловушке хо-  
10\*

рошо согласуются с представлениями о желобковой турбулентной конвекции.

2. *Турбулентная конвекция плазмы в диффузном пинче.* В качестве второго примера рассмотрим диффузный тороидальный разряд с умеренным продольным магнитным полем. Эксперименты с такими разрядами были начаты на установке «Зета», затем они были продолжены и проводятся по настоящее время на целом ряде тороидальных установок.

В этих экспериментах было установлено, что в режимах с сильным током имеет место аномально быстрая утечка энергии из плазмы, так что конфигурация магнитного поля становится практически бессиловой, т. е. ток течет вдоль поля:  $\text{rot} \mathbf{V} = \mu \mathbf{V}$ . Оказывается, что коэффициент пропорциональности  $\mu$  между током и полем практически постоянен по сечению. Соответственно, продольное  $B_z$  и азимутальное  $B_\theta$  поля имеют распределение, описываемое функциями Бесселя [см. (1.22)]. При достаточно большом значении величины  $\Theta$ , пропорциональной отношению тока в плазме к продольному магнитному потоку [см. (1.23)], продольное магнитное поле само собой меняет знак на периферии плазменного шнура. Зондовые измерения распределения плотности плазмы по радиусу обнаружили значительные ее флуктуации при сравнительно низких частотах.

Все эти факты нашли свое объяснение в рамках представлений о турбулентности плазмы в диффузных тороидальных разрядах [13, 232, 233]. Можно сказать, что в таких разрядах происходит квазистационарное турбулентное движение. Протекающий по плазме ток передает ей энергию посредством механизма джоулевых потерь, и эта энергия служит источником возбуждения турбулентных пульсаций. Колебания черпают энергию для своего поддержания как из плазмы, так и от магнитного поля.

Корреляционные измерения флуктуаций плотности показали, что характерная длина корреляции пульсаций плотности  $l$  мала, порядка 0,1 радиуса шнура [233]. Таким образом, турбулентное движение плазмы напоминает движение жидкости в турбулентных потоках, где длина перемешивания также на порядок меньше характерных размеров потока.

Пульсации плазмы приводят к довольно быстрому конвекционному переносу энергии к стенкам камеры, так что плазма становится бессиловой. При этом, как было по-

казано Тейлором [13], устанавливается такая магнитная конфигурация, которая обладает минимумом магнитной энергии при заданных потоках.

Таким образом, в результате развития турбулентности конфигурация полей сама собой подстраивается к наиболее устойчивой (при больших токах с обратным продольным магнитным полем на периферии). Это конфигурация является квазистационарной, она определяется только одним параметром  $\Theta$  [см. (1.23)].

В экспериментах Бабицева и др. [231] было показано, что при изменении знака продольного магнитного поля снаружи от разряда (т. е. при уменьшении потока  $\Phi$ ) конфигурация долгое время сохраняется, а затем она скачком перестраивается на такую же конфигурацию, но с противоположным знаком потока магнитного поля  $\Phi$  внутри плазменного шнура. Эти опыты показывают, что как макроскопическое образование бессиловой турбулентный разряд довольно устойчив при изменении  $\Theta$  в некотором интервале значений не выше критического.

Если с самого начала создавать конфигурацию поля с обратным магнитным полем на периферии разряда (т. е. близкую к бессиловой), то плазменный шнур обнаруживает повышенную МГД-устойчивость [234].

Таким образом, диффузный разряд представляет собой очень удобный объект для изучения МГД-турбулентности в плазме типа турбулентной конвекции самой плазмы и магнитного поля.

## § 7. Эволюция бесстолкновительных систем

При рассмотрении кинетических турбулентностей мы все время говорили о возбуждении тех или иных колебаний в плазме, например ионного звука или ленгмюровских волн. Но, как мы знаем, в разреженной плазме возможны и другие типы возмущений, которые можно назвать волнами Ван-Кампена или баллистическими модами. Они имеют вид небольших пучков или сгустков заряженных частиц, пролетающих через плазму. Эти моды, вообще говоря, соответствуют сильно затухающим колебаниям, поскольку из-за теплового разброса частиц сгустки такого типа довольно быстро расплываются в пространстве. Однако если они были созданы в начале процесса, то за время своего расплывания они

смогут привести к какому-то коллективному процессу релаксации.

В особенности важна роль таких механизмов в условиях, когда не могут возбуждаться коллективные моды. Примером таких систем «кулоновски взаимодействующих частиц» могут служить звездные скопления или галактики. Известно, что в нашей Галактике распределение звезд по скоростям напоминает максвелловское (с небольшой анизотропией температур). Вместе с тем время парных гравитационных столкновений звезд значительно больше времени жизни Галактики, так что они не могли бы привести к хаотизации скоростей. Вряд ли эта хаотизация может быть связана и с возбуждением коллективных колебаний, поскольку радиус галактик имеет порядок дебаевского радиуса (так как кинетическая энергия звезд — порядка потенциальной). Таким образом, возникает проблема объяснения релаксации системы бесстолкновительных кулоновски взаимодействующих систем частиц без возбуждения коллективных степеней свободы.

Линден-Белл рассмотрел эту проблему на основе чисто статистических соображений [235]. Следуя его рассуждениям, рассмотрим простой случай однородной в среднем системы кулоновски взаимодействующих частиц с некоторым неоднородным распределением. Для простоты рассмотрим двумерную фазовую плоскость  $(x, v)$  (рис. 75) и допустим, что функция распределения  $f(x, v)$

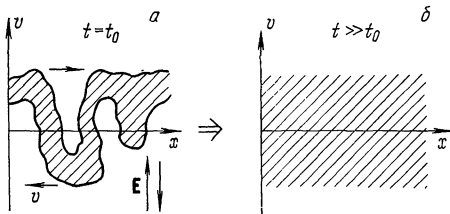


Рис. 75. Штриховая область на фазовой плоскости, занятая частицами до релаксации (а) и после нее (б)

принимает только два значения: единица в заштрихованной области и нуль вне ее. У невзаимодействующих частиц вся эта фазовая плоскость перекашивалась бы в горизонтальном направлении со скоростью, пропорциональной удалению от оси абсцисс. С учетом взаимодействия через самосогласованное поле  $E$  частицы будут перемешиваться также и в вертикальном направлении.

Таким образом, в конце концов вся картина рис. 75 перемешается, и можно поставить вопрос о том, к какому же конечному состоянию прорелаксирует бесстолкновительная система частиц, поведение которой описывается уравнением Власова.

Линден-Белл предположил, что такое перемешивание идет все время, пока не достигается наиболее вероятное состояние при заданных энергии и числе частиц. При этом нужно учесть, что согласно уравнению Власова течение в фазовом пространстве является несжимаемым. Поэтому должен действовать своеобразный принцип исключения: функция распределения в данном элементе фазового пространства либо равна нулю, если туда пришла ячейка без частиц, либо она равна начальному значению в той ячейке, которая пришла в результате перемешивания в данную точку фазового пространства. Если вначале функция распределения была равна единице во всей области, где были частицы, и нулю вне ее, то мы получим принцип исключения Паули. Соответственно равновесная функция распределения с заданным числом частиц и энергией должна в точности совпадать с функцией распределения Ферми.

Этот очень интересный результат был получен из чисто статистических соображений, и не вполне ясно, при каких условиях функция распределения должна релаксировать к этому наиболее вероятному состоянию. Чтобы выяснить этот вопрос, были предприняты числовые расчеты [236]. Они показали, что при сильно неоднородных начальных условиях действительно после нескольких плазменных периодов достигается квазиравновесное состояние с функцией, близкой к ферми-распределению, с небольшим высокоэнергичным хвостом. Но если начальное распределение было слабо искаженным, близким к стационарному, то релаксация была более вялой и конечное состояние отклонялось от распределения Ферми.

Качественно эти результаты легко понять, если действовать в духе квазилинейного метода, но вместо коллективных мод учесть баллистические моды типа расплывающихся со временем макрочастиц. В самом деле, начальные неоднородности на рис. 75 можно рассматривать как некоторые области положительного и отрицательного зарядов, наложенные на равновесный конечный



фон. Фактически это — некие сгустки или макрочастицы, которые затем будут двигаться в самосогласованном поле, создаваемом ими самими. Это поле гораздо больше, чем тепловой фон от реальных частиц, так как заряды сгустков гораздо больше заряда отдельной частицы. Но сгустки очень похожи на кулоновски взаимодействующие частицы: они движутся почти по прямым линиям, испытывая торможение и диффузию во флуктуирующих электрических полях, создаваемых ими самими. Для описания релаксации этих частиц можно воспользоваться членом столкновений типа кулоновского в форме Ландау, пропорциональным квадрату эффективного заряда  $q$  макрочастиц.

Из этого следует, что если заряд  $q$  достаточно велик или медленно расплывается со временем, то частицы успевают релаксировать к статистически равновесной функции распределения (т.е. функции Ферми при начальной функции  $f=0$  или 1, рис. 75). Если же заряды  $q$  слишком быстро убывают со временем или с самого начала они невелики, то окончательной релаксации не происходит.

Таким образом, баллистические моды также могут дать вклад в коллективные процессы релаксации, если с самого начала имеются достаточно сильные возмущения этого типа. Кроме того, расплывающиеся во времени макрочастицы типа баллистических мод могут образовываться в турбулентной плазме, однако их роль в этом случае, по-видимому, очень мала, так как они быстро расплываются со временем.

Как мы видим, релаксация бесстолкновительных систем связана с движением несжимаемой жидкости в фазовом пространстве, и поэтому здесь есть нечто сходное с турбулентностью обычной несжимаемой жидкости. Можно привести еще один пример бесстолкновительной релаксации, который еще более тесно связан с турбулентностью жидкости.

Рассмотрим сильно неизотермическую плазму ( $T_i \ll T_e$ ) и предположим, что в такой плазме возбуждено некоторое начальное течение ионов со скоростью  $v$ , значительно меньшей скорости звука,  $v \ll \sqrt{T_e/m_i}$ . Тогда при дальнейшем движении плазма будет практически несжимаемой, а ионы будут двигаться просто как несжимаемая жидкость. При исчезающе малой вязкости

это движение, вообще говоря, будет турбулентным, и мы просто будем иметь затухающее на турбулентных пульсациях хаотическое течение жидкости. Но, с другой стороны, это движение представляет собой процесс релаксации бесстолкновительной системы электронов и ионов. Таким образом, в данном случае бесстолкновительная релаксация частиц плазмы сводится просто к обычной турбулентности. Приведенный пример свидетельствует о том, что турбулентность плазмы, будучи во многих отношениях вполне самостоятельным объектом, сильно отличающимся от турбулентности обычной жидкости, все же тесно связана с обычной турбулентностью и в отдельных частных случаях даже сводится к ней.

В заключение нам еще раз хотелось бы подчеркнуть, что изложенный в этой книге материал никоим образом не охватывает всей информации, имеющейся в литературе по данному вопросу, а лишь служит введением в круг идей и основных представлений о коллективных явлениях в плазме.

## ПЕРЕЗАМЫКАНИЕ МАГНИТНЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ

При движении плазмы с очень высокой электропроводностью имеет место замечательное свойство «приклеенности» магнитных силовых линий: при движении плазмы силовые линии следуют за ней, будучи как бы «вморожены» в плазму. Свойство вмороженности существенно облегчает анализ сил со стороны магнитного поля, возникающих при смещении плазмы от первоначально равновесного состояния. Тем самым значительно упрощается анализ устойчивости равновесных состояний плазмы. Кроме того, свойство вмороженности, казалось бы, гарантирует сохранение топологии магнитных силовых линий при более сложных движениях плазмы. Оказывается, однако, что это последнее утверждение не вполне верно. Дело в том, что при сложном движении плазмы силовые линии с различными направлениями могут подходить очень близко друг к другу, почти соприкасаясь. При дальнейшем движении плазмы силовые линии могут разойтись в прежней топологии, а могут и «перезамкнуться». При наличии конечной, хотя и очень большой, электропроводности такое перезамыкание может произойти без касания линий, а всего лишь при тесном их сближении. Разумеется, сам факт сближения силовых линий с сильно различающимися направлениями магнитного поля означает, что вблизи точки сближения имеется достаточно высокая плотность электрического тока. Таким образом, при перезамыкании конечная электропроводность «срабатывает» только в малых областях с высокой плотностью тока, но при этом может происходить существенное изменение топологии силовых линий, которое может сказаться на движении всей плазмы.

Важность процессов перезамыкания была понята вначале в применении к физике Солнца и магнитосферы Земли. Первые идеи о возможности перезамыкания силовых линий в нейтральных точках в плазме были высказаны довольно давно в применении к солнечным [241] и магнитосферным [242] физическим явлениям. Данжи [243] на основе простых физических соображений

о перезамыкании силовых линий магнитосферы Земли со встречными полями солнечного ветра объяснил, как в результате переброса «разрезанных» силовых линий на ночную сторону Земли происходит образование магнитного хвоста. Накапливаемые в хвосте силовые линии приводят к образованию нейтрального слоя между полями противоположных направлений. Акасофу [244] показал, что перезамыкание в нейтральном слое магнитного хвоста является наиболее естественным механизмом освобождения магнитной энергии хвоста и возбуждения суббури.

Простейшие модели перезамыкания были предложены Паркером [245], Свитом [246] и Печекком [247]. В этих моделях существенную роль играет сопротивление плазмы, обеспечивающее перенос силовых линий через так называемую  $x$ -точку, т. е. точку пересечения встречных полей. Для условий магнитосферы Земли более адекватно кинетическое описание плазмы в отсутствие столкновений. Роль диссипации, обеспечивающей перевод части магнитной энергии в плазму и перенос силовых линий через  $x$ -точку, выполняется в этом случае частицами, ускоряющимися в процессе перезамыкания. А сам процесс перезамыкания начинается как результат неустойчивости нейтрального слоя, по которому течет ток также в виде плоского слоя, по отношению к стягиванию этого тока в отдельные токовые нити. Эта неустойчивость называется тиринг-неустойчивостью. Коппи, Лаваль и Пелла [248] были первыми, кто предложил тиринг-неустойчивость как механизм инициирования процесса перезамыкания силовых линий и суббури. Позднее Шиндлер [249] показал, что малая поперечная к слою компонента магнитного поля полностью подавляет электронную тиринг-моду, т. е. исключает электроны из процесса диссипации. Таким образом, только ионная тиринг-мода представляется относящейся к делу. Галеев и Зеленый [250] пояснили, почему суббуря имеет характер внезапного взрыва, опираясь на линейный анализ и показав, что тиринг-неустойчивость возможна только в определенном интервале значений поперечного магнитного поля. Даже слабое начальное возмущение может перевести этот слой в состояние с  $x$ -точками, где стабилизация поперечным полем отсутствует и тирингнеустойчивость развивается в нелинейном режиме [251].

Кинетические и МГД-неустойчивости в нелинейном режиме изучались численно во многих работах.

Другой круг явлений, связанных с процессом переза-мыкания, относится к солнечным вспышкам, во время которых происходит достаточно быстрая перестройка магнитного поля с превращением части магнитной энергии в энергию ускоренных частиц. Для описания этого круга явлений более адекватной представляется модель перезамыкания Сыроватского [252]. В этой модели перезамыкание рассматривается как динамический процесс, сопровождающийся уменьшением плотности вблизи  $x$ -точки и образованием токового слоя. Тем самым создаются условия, способствующие ускорению частиц.

Для изучения процессов перезамыкания были поставлены специальные лабораторные эксперименты [253—254], которые подтвердили теоретические представления.

Оказалось, однако, что процессы перезамыкания совершенно неожиданно проявились в экспериментах, в которых все усилия экспериментаторов были направлены на получение спокойной плазмы без каких-либо динамических процессов. Мы имеем в виду эксперименты по термоядерным исследованиям. Наиболее устойчивой плазма, казалось бы, должна быть в условиях, когда она стабилизирована сильным магнитным полем. Установка такого типа называется токамаком. Упрощенно это — тороидальная камера с сильным продольным магнитным полем, в которой плазма создается и поддерживается в горячем состоянии протекающим по плазме продольным током. Идеально, в такой плазме должны образовываться вложенные друг в друга тороидальные поверхности, на которых располагаются магнитные силовые линии. Однако оказалось, что поведение плазмы гораздо сложнее этой идеальной картины. Еще в ранних экспериментах Арцимовича, Мирнова и Стрелкова [255] и Горбунова и Разумовой [256] было обнаружено, что в плазме токамака иногда неожиданно развивается так называемая неустойчивость срыва, которая приводит к выбросу части полоидального магнитного потока за пределы плазмы, а иногда приводит к полному разрушению плазмы и прекращению тока.

Долгое время не было ясно, какова природа неустойчивости срыва. Ключ к ее пониманию появился, когда в экспериментах фон Гёлера, Стодика и Саутхофа [257] было обнаружено другое явление, получившее название

пилообразных колебаний или внутреннего срыва. Оно заключается в том, что в глубине плазменного шнура возникают периодические колебания релаксационного типа, в которых центр шнура постепенно разогревается, а затем тепло резко сбрасывается за пределы некоторого цилиндра радиуса  $r_s$ , который обычно значительно меньше радиуса плазмы  $a$ . Радиус  $r_s$  получил название точки переворота фазы колебаний. Кадомцев [258] предложил простую модель внутреннего срыва, согласно которой сброс тепла из центра связан с развитием винтовой тиринг-моды с последующим полным перезамыканием силовых линий винтового шнура с силовыми линиями окружающих магнитных поверхностей. Эта простая модель оказалась согласующейся с целым рядом наблюдений пилообразных колебаний. Более подробное изучение пилообразных колебаний показало, что иногда картина усложняется развитием турбулентности в области перезамыкания [259] и стохастизацией силовых линий [260].

Объяснение внутреннего срыва позволило развить подходы к объяснению малого и большого срывов плазмы. Физическая причина срыва была пояснена простой моделью заброса вакуумных пузырей в плазму из-за винтовой неустойчивости [173]. В этой работе были использованы предложенные авторами редуцированные уравнения магнитной гидродинамики, которые оказались очень удобными для описания нелинейных МГД-явлений в плазме токамака. Трехмерная динамика плазмы с развитием многих винтовых мод была численно промоделирована в работах Ваделла с коллегами [261—263] и Струсса [264]. Это моделирование, в котором большую роль играют процессы перезамыкания силовых линий взаимодействующих мод, показало достаточно правдоподобно, что срывы связаны с нелинейной МГД-неустойчивостью плазменного шнура и проявляются в разрушении магнитной структуры и стохастизации силовых линий магнитного поля.

### Самоорганизация плазмы в токамаках

В токамаке процессы перезамыкания играют существенную роль в установлении параметров плазменного шнура, точнее, в формировании устойчивого распределения плотности тока по сечению шнура.

Априори не исключена возможность, что весь ток соберется в центр плазменного шнура, где плазма интенсивнее нагревается. Однако этого не происходит, и в действительности устанавливается некоторый самосогласованный профиль температуры и плотности тока, который определяется коллективными процессами в плазме. Можно сказать, что плазма токамака является самоорганизующейся физической системой.

Условно все сечение плазмы токамака можно разбить на три зоны. Во внутренней зоне плотность тока контролируется так называемыми внутренними срывами или пилообразными колебаниями. Эти периодически повторяющиеся процессы перезамыкания не дают плотности тока увеличиться, ограничивая ее на уровне, соответствующем величине  $q \approx 1$ . Далее идет зона аномальной электронной теплопроводности, в которой важную роль играют мелкомасштабные перезамыкания силовых линий — так называемый магнитный флаттер, и, наконец, на периферии расположена зона более холодной резистивной плазмы, в которой повышены переносы и шумы в плазме и которая играет заметную роль в формировании полных профилей  $T_e(r)$ ,  $q(r)$ .

Пилообразные колебания выглядят как периодический процесс, состоящий в медленном нарастании температуры электронов в центре плазмы, затем на фоне этого нарастания появляются колебания винтовой моды  $m=1/n=1$ , которые сменяются затем резким сбросом температуры внутри некоторой области  $r < r_s$ . Снаружи от этой области, т. е. при  $r > r_s$ , температура резко возрастает. Радиус  $r_s$ , как обычно, — радиус инверсии.

Простая физическая модель этого явления была предложена Кадомцевым [258]. Предположим, что в центре плазменного шнура запас устойчивости  $q(0)$  меньше единицы, так что в области  $q < 1$  возможно развитие внутренней винтовой моды  $m=1/n=1$ . По отношению к такому возмущению поперечная компонента магнитного поля  $B_* = B_\theta - (r/R)B_z$  оказывается имеющей разные знаки по разные стороны от точки  $r=r_s$ , где  $q=1$ . Тогда вблизи  $r=r_s$  оказывается возможным перезамыкание силовых линий. Подчеркнем, что точка  $r_s$  в этой модели связывается с положением  $q(r_s) = 1$ , что в самом деле согласуется с экспериментальными данными по определению профиля  $q(r)$ . В предположении параболического начального профиля плотности тока вблизи оси из со-

хранения потока можно найти радиус области перезамыкания  $r_0 = (2r_s)^{1/2}$ . Это значение близко к экспериментальному. Удовлетворительное согласие с экспериментами показало и численное моделирование развития перезамыкания [265, 261—263]. Эта модель была несколько усовершенствована Парайлом и Переверзевым (1980), чтобы учесть распределение тока, обусловленное последовательностью пилообразных зубцов. Тем не менее нельзя сказать, что физика пилообразных колебаний выяснена до конца. Во-первых, не очень ясно, какая именно неустойчивость служит триггером для старта моды  $m=1$ . В рамках идеальной магнитной гидродинамики внутренняя мода  $m=1$  при обычных давлениях плазмы в токамаках должна быть устойчивой [266]. Более неустойчивыми являются диссипативные моды [267], которые в горячей плазме усложняются дрейфовыми эффектами.

Важно отметить, что в некоторых экспериментах в обычных режимах с  $q(a) > 2$  перезамыкание не всегда идет до конца. На установке ТФР [268] результаты наблюдений пилообразных колебаний лучше согласуются с моделью неполного перезамыкания, которая трактуется Дюбуа и Самэном (1980) как модель с МГД-турбулентностью в  $x$ -точке сепаратрисы.

Разумеется, картина спокойного ламинарного и притом полного перезамыкания является упрощенной. Во-первых, само выбрасывание плазмы из  $x$ -точки может служить источником сильных возмущений плазмы внутри острова, там может возбуждаться МГД-турбулентность. Кроме того, как было отмечено Лихтенбергом [260], из-за тороидальности область вблизи сепаратрисы может стать стохастической.

Итак, перезамыкание силовых линий является наиболее естественным механизмом пилообразных колебаний. Перезамыкание может идти до конца или оно может приостановиться, если вновь образованный месяцевидный остров окажется турбулизованным.

Пилообразные колебания играют большую роль в формировании профиля тока в токамаке: они не позволяют  $q(r)$  спуститься заметно ниже единицы в центре шнура (впрочем, имеются эксперименты, которые не противоречат допущению  $q(0) < 1$ , пилообразные колебания при этом отсутствуют). Как уже отмечалось, пока не



ясно, что является триггером пилообразных колебаний.

Обсудим теперь вторую и третью зоны токамака. В этих областях, как показывает эксперимент, основным каналом потерь энергии плазмы и соответственно установления профиля температуры является аномальная электронная теплопроводность. Наиболее аккуратные данные по определению величины электронной теплопроводности были получены на установке Т-11 Мережкиным и Муховатовым [269]. Они показали, что электронная температуропроводность  $\chi_e$  пропорциональна величине  $(v_T/qR)c^2/\omega_{pe}^2$ . Это соотношение, замеченное ранее Окавой (1978), имеет довольно простой физический смысл:  $c/\omega_{pe}$  — это толщина бесстолкновительного скин-слоя, а  $qR/v_T$  — характерное время пролета электрона вдоль силовой линии, характерная длина которой  $\sim qR$ . Таким образом, естественно возникает картина, которую можно назвать магнитным флаттером [271—272]. Магнитные поверхности токамака могут испытывать колебания и вследствие этого близко подходить друг к другу. При идеальной проводимости они не могут обмениваться силовыми линиями. Однако на расстоянии  $c/\omega_{pe}$  магнитное поле не может быть заморожено в плазму из-за продольной инерции электронов, играющей роль бесстолкновительного сопротивления. Таким образом, при дрожании поверхностей происходит перезамыкание силовых линий на длине  $\sim c/\omega_{pe}$ , и электроны могут перетекать с одной поверхности на другую. Источником колебаний магнитных поверхностей могут служить колебания плазмы на периферии плазменного шнура в сочетании с возбуждаемыми ими магнитными островами.

Еще более интригующее явление взрывного разрушения плазменного шнура было открыто в самых ранних исследованиях на токамаках [255—256]. При срыве происходит резкое уплощение распределения плотности тока в шнуре. При этом из плазмы выбрасывается часть полоидального потока, срыв сопровождается сильными МГД-колебаниями и выбросом заметной доли энергии плазмы на стенки. Большой срыв приводит к полному прекращению тока в плазме.

Уплощение профиля плотности тока регистрируется по уменьшению индуктивности плазменного шнура и подскоку тока, а выброс некоторой доли полоидального потока — по отрицательному пичку на напряжении обхо-

да. Естественно считать, что срыв связан с МГД-перестройкой магнитной конфигурации. Сходство явлений пилообразных колебаний и срывов подсказывает, что оба эти явления могут быть связаны с процессами перезамыкания силовых линий.

Для понимания того, как может сбрасываться энергия полоидального поля, была полезной идеализированная модель Кадомцева, Погуце [173] проникновения винтовых вакуумных пузырей внутрь шнура. Она была основана на упрощенных уравнениях гидродинамики плазмы в сильном магнитном поле, которые затем использовались для моделирования более сложной трехмерной динамики плазмы [261—264]. В более сложных моделях учитывается возбуждение многих мод с различной винтовой симметрией, т. е. различными  $m/n$ . Такие моды могут взаимодействовать либо косвенно путем квазилинейного изменения профиля плотности тока, либо напрямую из-за нелинейного зацепления. Существуют различные подходы к анализу такого взаимодействия. Захаров [273] рассмотрел вопрос о возможности нелинейной неустойчивости с помощью анализа винтовых равновесий и привел аргументы в пользу разрушения плазменного столба при винтовом его возмущении. Нелинейная вспышка сцепленных между собой тиринг-мод была показана численными экспериментами [261, 262, 271]. Главным нелинейным механизмом представляется взаимодействие мод  $m=2/n=1$  и  $m=3/n=1$ , которые затем порождают набор многих мод с различными  $m/n$ . Численное моделирование неплохо описывает экспериментально наблюдаемые черты срыва.

Таким образом, представляется довольно правдоподобным, что неустойчивость срыва связана с нелинейной МГД-неустойчивостью плазменного шнура и проявляется в разрушении магнитной структуры и стохастизации силовых линий магнитного поля. С точки зрения движения плазмы МГД-турбулентность во время срыва, вероятно, сходна с обычной турбулентностью жидкости.

### Пинчи с обратным полем

Еще большую роль играют процессы перезамыкания в пинчах с обратным полем. Пинч с обратным полем — это тоже тороидальный разряд, стабилизированный продольным полем, но, в отличие от токамака, имеющий

$q \ll 1$ . Другими словами, в RFP продольное магнитное поле одного порядка величины с собственным полем тока. Сравнительно давно было обнаружено, что в таком пинче продольное магнитное поле меняет знак на периферии разряда, чем и объясняется название RFP. Распределения продольного  $B_z$  и полоидального  $B_\theta$  полей близки соответственно к нулевой и первой функции Бесселя. Этот факт был объяснен Тейлором [13], как результат релаксации магнитной конфигурации к состоянию с минимумом магнитной энергии при заданной винтовости. Эта релаксация происходит с перезамыканием силовых линий. В качестве простейшей модели эту релаксацию рассматривают в рамках перезамыкания на модах  $m=1$ . Но это не обязательно. Если магнитное поле слегка стохастизировано, то силовые линии диффундируют поперек плазменного шнура. В конфигурации, близкой к бессиловой,  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{V}$ , где  $\lambda = \text{const}$  вдоль силовой линии (это следует из условия  $\text{div } \mathbf{j} = \mathbf{V} \nabla \lambda = 0$ ). И так как одна силовая линия покрывает все сечение, то  $\lambda$  можно считать не зависящей от  $r$ , а это автоматически приводит к модели функций Бесселя. Аналогичное рассуждение можно провести и в терминах переноса электронного момента тока вдоль стохастизированных силовых линий (Расбридж, 1982) либо в терминах магнитного динамо. Однако суть физической картины остается прежней: перезамыкания слабо разрушают конфигурацию вложенных магнитных поверхностей и приводят к релаксации магнитной конфигурации к модели функций Бесселя.

### Заключительные замечания

Идея перезамыкания силовых линий оказалась очень плодотворной. Она стала ключевой в объяснении целого ряда явлений в лабораторной и космической плазмах, имеющих характер взрывной трансформации энергии магнитного поля в тепло и кинетическую энергию частиц. Только идея перезамыкания позволяет найти общий подход к объяснению этого широкого круга явлений. Более того, эта идея позволяет найти общие черты в процессах, отличающихся многими порядками величин по геометрическим и энергетическим масштабам явлений. Поэтому качественная роль идеи перезамыкания

неоценима. Что же касается количественной стороны, то она пока еще не может считаться достигшей совершенства. Дело в том, что процессы перезамыкания довольно сложны даже в лабораторных, а тем более в естественных условиях. Теоретические модели, как правило, ухватывают лишь качественные, в основном двумерные, черты явления перезамыкания. Между тем реально развивающееся перезамыкание быстро принимает трехмерный, т. е. хаотически сложный, характер, вместе с тем напоминающий взрывообразный или, по крайней мере, релаксационно развивающийся процесс. Поэтому и соответствующие теоретические модели самого процесса перезамыкания являются либо сильно упрощенными, либо достаточно сложными, либо, наконец, одновременно и упрощенными и сложными.

На сегодня большую ценность представляют скорее не модели, а выраженные в них идеи. Это идеи самого перезамыкания, т. е. изменения топологии магнитного поля, и конкретные идеи образования токовых слоев и последующего перезамыкания в них, иногда принимающего взрывной характер. Уже сами эти идеи позволяют качественно понять многие конкретные проявления перезамыкания силовых линий.

В настоящее время общепризнано, что перезамыкание силовых линий представляет собой фундаментальный физический процесс в плазме, ответственный за многие явления плазменной активности. Для правильного описания динамики плазмы в магнитном поле его понимание не менее важно, чем представление о вмерзности силовых линий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Список литературы не претендует на полноту, в нем приведены только основные книги и статьи.

С основами магнитной гидродинамики можно познакомиться по книгам:

1. Альфен Х. Космическая электродинамика. — М.: ИЛ, 1952.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957.
3. Спицер Л. Физика полностью ионизованного газа. — М.: ИЛ, 1957.
4. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. — М.: ИЛ, 1959.
5. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. — М.: Физматгиз, 1961.

Вопросы равновесия плазмы в магнитном поле изучались в работах:

6. Kruskal M. D., Kulsrud R. M. // Phys. Fluids. — 1958. — V. 1. — P. 265.
7. Шафранов В. Д. // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1963. — Вып. 2. С. 92—130.
8. Hamada S. // Nucl. Fusion. — 1962. — V. 1, 2. — P. 23.
9. Mercier C. // Nucl. Fusion. — 1963. — V. 3. — P. 89; 1964. — V. 4. — P. 213.
10. Шафранов В. Д. // Ядер. синтез. — 1964. — Т. 4. — С. 232.
11. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1967. — Вып. 5. — С. 3—207.
12. Green J. M., Johnson J. L. // Phys. Fluids. — 1961. — V. 4. — P. 875.
13. Taylor J. B. // Phys. Rev. Lett. — 1974. — V. 33. — P. 1139.
14. Кадомцев Б. Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — Т. 3. — С. 353.
15. Yoshikawa S. // Phys. Fluids. — 1964. — V. 7. — P. 278.
16. Meyer F., Schmidt N. V. Z. // Naturforsch. — 1958. — V. 13a. — P. 1005.
17. Мухоматов В. С., Шафранов В. Д. // Ядер. синтез. — 1971. — Т. 11. — С. 605.
18. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. // Ядер. синтез. — 1972. — Т. 12. — С. 599.

Эксперименты по удержанию тороидальной плазмы описаны в работах:

19. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. — М.: Физматгиз, 1960.

20. *Rusbridge M. G., Lees D. J., Saunders P. A. H.* // Nucl. Fusion. — 1962. — Suppl. 3. — P. 903.
  21. *Ioshikawa S., Harries W. L., Sinclair R. M.* // Phys. Fluids. — 1963. — V. 6. — P. 1506.
  22. *Wagner F., Becker G., Behringer K. et al.* // Phys. Rev. Lett. — 1982. — V. 49. — P. 1408.
  23. *Арцимович Л. А.* Замкнутые плазменные конфигурации. — М.: Наука, 1969.
  24. *Арцимович Л. А.* // Ядер. синтез. — 1972. — Т. 2. — С. 215
  25. Third International Symposium on Toroidal Plasma Confinement, Garching. München. — 1973.
  - 25a. *Bickerton R. J., Connor J. W., Taylor J. B.* // Nature Phys. Science. — 1971. — V. 229. — P. 110.
  256. *Кадомцев Б. Б., Шафранов В. Д.* // Nucl. Fusion Res. — Vienna: IAEA, 1971. — V. 1. — P. 172.
- О столкновении частиц в плазме см.:
26. *Medanici E. W.* Collision Phenomena in Ionized Gases. — N. Y.: Wiley, 1964.
  27. *Брагинский С. И.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1962. — Вып. 1. — С. 183.
  28. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. — 1937. — Т. 7. — С. 203.
  29. *Сивухин Д. В.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1964. — Вып. 4. — С. 61.

Относительно роли эффекта Холла в плазме см.:

30. *Морозов А. И., Шубин А. П.* // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 46. — С. 710.
31. *Кадомцев Б. Б.* // ЖЭТФ. — 1967. — Т. 52. — С. 1039.
32. *Haines M. G.* // Phys. Lett. — 1963. — V. 6. — P. 313.
33. *Haines M. G.* // Advances in Physics. — 1965. — V. 14, № 54. — P. 167.
34. *Thonemann P. C., Kolb A. C.* // Phys. Fluids. — 1964. — V. 7. — P. 1455.

Диффузия и процессы переноса в плазме освещены в работах:

35. *Pfirsch D., Schlüter A.* // Max-Planck Inst. Rep. MPI/PA/62, 1962.
36. *Knorr G.* // Phys. Fluids. — 1965. — V. 8. — P. 1334.
37. *Голант В. Е.* // УФН — 1963. — Т. 79 — С. 377.
38. *Simon A.* // Phys. Rev. — 1955. — V. 98. — P. 317.
39. *Ноф F. C.* // Rev. Mod. Phys. — 1962. — V. 34 — P. 267.
40. *Голант В. Е., Данилов О. Б., Жилинский А. П.* // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 33. — С. 1043.
41. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* // Вопросы теории плазмы. — М.: 1973. — Вып. 7. — С. 205.

Вопросы распространения магнитогидродинамических волн рассмотрены в работах:

42. *Сыроватский С. И.* // УФН. — 1957. — Т. 62. — С. 247.
43. *Sears W. R.* // Rev. Mod. Phys. — 1960. — V. 32. — P. 701.
44. *Grad H.* // Rev. Mod. Phys. — 1960. — V. 32. — P. 831.
45. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1962.

46. *Половин Р. В., Черкасов К. П.* // УФН. — 1966. — Т. 88. — С. 593.  
 47. *Сивухин Д. В.* Магнитная гидродинамика. — 1966. — Т. 1. — С. 35.  
 48. *Grad H.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1973. — V. 70. — С. 3277.

Волны на воде подробно описаны в книге

49. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. — М.: ИЛ, 1959.

По поводу электромагнитных волн в плазме см.:

50. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Физматгиз, 1960.  
 51. *Силин В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961.  
 52. *Шафранов В. Д.* Электромагнитные волны в плазме // Вопросы теории плазмы — М.: Госатомиздат, 1963. — Т. 3. — С. 3—140.  
 53. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В.* и др. — Коллективные колебания в плазме. — М.: Госатомиздат, 1964.  
 54. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука. 1970.  
 55. *Стикс Т. Х.* Теория плазменных волн. — М.: Госатомиздат, 1965.  
 56. *Власов А. А.* // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8. — С. 291; УФН. — 1967. — Т. 93. — С. 444.  
 57. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. — 1946. — Т. 16. — С. 574; УФН — 1967. — Т. 93. — С. 527.  
 58. *Vlasov A. A.* // J. Phys. (USSR). — 1945. — V. 9. — P. 25.  
 59. *Van Kampen N. S.* // Physica. — 1955. — V. 21. — P. 949.  
 Имеется перевод: Колебания сверхвысоких частот в плазме. — М.: ИЛ, 1961.

На существование волн с отрицательной энергией в неравновесной плазме было обращено внимание в работе:

60. *Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В.* // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 2266.

Параболическое уравнение было предложено в работе

61. *Леонтович М. А.* // Изв. АН СССР. Физика. — 1944. — Т. 8. — С. 16.

Непрерывные спектры собственных частот неоднородной плазмы изучались в работах:

62. *Тимофеев А. В.* // УФН. — 1970. — Т. 102. — С. 185.  
 63. *Uberoi C.* // Indian J. Pure & Appl. Phys. — 1964. — V. 2. — P. 133.  
 63а. *Barston E. M.* // Ann. Phys. — 1964. — V. 29. — P. 282.  
 64. *Pridmore-Brown D. C.* // Phys. Fluids. — 1966. — V. 9. — P. 1290.  
 65. *McPherson D. A., Pridmore-Brown D. C.* // Phys. Fluids. — 1966. — V. 9. — P. 2033.  
 66. *Tataronis J., Grossman W.* // Z. Phys. — 1973. — Bd 261. — S. 1.

67. Grossman W., Kaufman M., Neukauser J. // Nucl. Fusion. — 1973. — V. 3 — P. 462.
68. Grad H. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1973. — V. 70. — P. 3277.
- 68a. Appert K., Gruber R. // Phys. Fluids. — 1974. — V. 17. — P. 1471.
- 68б. Goedbloed J. P. // Phys. Fluids. — 1975. — V. 18. — P. 1258.  
Общие вопросы физики нелинейных волн изложены в работах:
69. Бломберген Н. Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.
70. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.
71. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. // УФН. — 1971. — Т. 103. — С. 193.
72. Сагдеев Р. З. // Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1964. — Вып. 4. — С. 20.
73. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. — М.: Наука, 1967.
74. Веденов А. А. // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1963. — Вып. 3. — С. 203.
75. Нелинейная теория распространения волн. — М.: Мир, 1970 (Сб. переводов из Proc Roy Soc — 1967 — V. 299A, № 1456).
76. Davidson R. C. Nonlinear Plasma Theory. — N. Y.: Academic Press, 1971.

По поводу нелинейных волн с дисперсией и солитонов см. литературу:

77. Березин Ю. А., Карпман В. И. // ЖЭТФ. — 1966. — Т. 51. — С. 1557.
78. Zabusky N. J., Kruskal M. D. // Phys. Rev. Lett. — 1965. — V. 15. — P. 240.
79. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. // Phys. Rev. Lett. — 1967. — V. 19. — P. 1095.
80. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. // J. Math. Phys. — 1968. — V. 9. — P. 1204.
81. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. // Функциональный анализ. — 1971. — Т. 5. — С. 18.
82. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. // Изв. АН СССР. Математика. — 1951. — Т. 15. — С. 309.
83. Марченко В. Л. // ДАН СССР. — 1955. — Т. 194. — С. 695.
84. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. — 1970. — Т. 13. — С. 163.
85. Алиханов С. Г., Алиновский Н. И., Долгов-Савельев Г. Г. и др. // Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. — Vienna: IAEA, 1969. — V. 1. — P. 47.
- Подробный обзор по солитонам см.
86. Scott A. S., Chu F. Y. F., McLaughlin D. W. // Proc. of IEEE. — 1973. — V. 61. — P. 1443.
- 86a. Taylor R. J., Baker D. R., Ikezi H. T. // Phys. Rev. Lett. — 1970. — V. 24. — P. 206.
- 86б. Захаров В. Е., Манакон С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.



- 86в. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. Эффект Ганна описан в статьях:
87. *Gunn J. B.* // Sol. State Comm. — 1963. — V. 1. — P. 88.
88. *Gunn J. B.* // Plasma Effects in Solids, 7 Intern. Conf. on the Physics in Semiconductors, Dunod, Paris, 1965.
89. *Gunn J. B.* // J. Phys. Soc. Jap. — 1966. — Suppl. 21. — P. 505.
90. *Ганн Дж.* // УФН. — 1966. — Т. 89. — С. 147.
91. *Волков А. Ф., Коган Ш. М.* // УФН. — 1968. — Т. 96. — С. 633.

Самофокусировка и самосжатие волновых пакетов рассмотрены в работах:

92. *Аскарьян Г. А.* // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42. — С. 1567; УФН. — 1973. — Т. 111. — С. 249.
93. *Lighthill M. J.* // J. Inst. Math. Appl. — 1965. — V. 1. — P. 269; Proc. Roy. Soc. — 1967. — V. A229. — P. 28.
94. *Benjamin T. B., Feir J. E.* // J. Fluid Mech. — 1967. — V. 27. — P. 417.  
*Benjamin T. B.* // Proc. Roy. Soc. — 1967. — V. A229. — P. 59.
95. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* // ДАН СССР. — 1970. — Т. 192. — С. 753.
96. *Chiao R. J., Gardmire F., Townes C. H.* // Phys. Rev. Lett. — 1964. — V. 13. — P. 479.
97. *Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И.* // Нелинейная оптика. — Новосибирск: Наука, 1968.
98. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* // УФН. — 1967. — Т. 93. — С. 19.
99. *Рудаков Л. И.* // ДАН СССР. — 1972. — Т. 207. — С. 821; *Захаров В. Е.* // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 62. — С. 1745.

По вопросу взаимодействия волн см. статьи и книги:

100. *Satac M., Kantorowicz A. R., Litvak M. M.* // Nucl. Fusion. — 1962. — Suppl. 2. — P. 423.
101. *Галеев А. А., Карпман В. И.* // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44. — С. 592.
102. *Силин В. П.* // ПМТФ. — 1964. — Т. 1. — С. 31.
103. *Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З.* // Ядер. синтез. — 1965. — Т. 5. — С. 20.
104. *Ораевский В. Н.* // Ядер. синтез. — 1964. — Т. 4. — С. 263.
105. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* // Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1964.
106. *Альтшуль Л. М., Карпман В. И.* // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 1552.
107. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. — М.: Физматгиз, 1958.
108. *Corpi B., Rosenbluth M. N., Sudan R.* // Ann. Phys. — 1969. — V. 55. — P. 207.
109. *Обухов А. М. и др.* Нелинейные системы гидродинамического типа. — М.: Наука, 1974.
110. *Bakai A. S.* // Nucl. Fusions. — 1970. — V. 10. — P. 53.
111. *Stern R. A., Tzooar N.* // Phys. Rev. Lett. — 1966. — V. 17. — P. 903.
112. *Захаров В. Е., Рубенчик А. М.* // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 65. — С. 997.

112а. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.

Затухание Ландау, в том числе нелинейное, исследовалось и описано в работах:

113. Ведынов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. // Ядер. синтез. — 1962. — Т. 3. — С. 1049.

114. Мазитов Р. К. // ПИМТФ. — 1965. — Т. 1. — С. 27.

115. O'Neil T. M. // Phys. Fluids. — 1965. — V. 8. — P. 2255.

116. Альтшуль Л. М., Карпман В. И. // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 49. — С. 515.

117. Bernstein I., Green J., Kruskal M. // Phys. Rev. — 1957. — V. 108. — P. 546.

118. Malmberg J. H., Wharton C. B., Drummond W. E. // Plasma Physics and Contr. Nucl. Fusion Res. — 1966. — V. 1. — P. 485.

119. Malmberg J. H., Wharton C. B. // Phys. Rev. Lett. — 1966. — V. 17. — P. 175.

120. Van-Hoven G. // Phys. Rev. Lett. — 1966. — V. 17. — P. 169.

121. Derfler H., Simonen T. C. // Phys. Rev. Lett. — 1966. — V. 17. — P. 172.

122. Derfler H., Simonen T. C. // 8th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Contributed papers. — Vienna, 1967. — P. 335.

123. Malmberg J. H., Wharton C. B. // Phys. Rev. Lett. — 1967. — V. 19. — P. 775.

124. Кадомцев Б. Б. // УФН. — 1968. — Т. 95. — С. 111.

С явлением эха можно более подробно познакомиться по статьям:

125. Hahn E. L. // Phys. Rev. — 1950. — V. 80. — P. 580.

126. Ораевский А. Н. // УФН. — 1967. — Т. 91. — С. 181.

127. Hill R. M., Kaplan D. E. // Phys. Rev. Lett. — 1965. — V. 14. — P. 1061.

128. Kaplan D. E., Hill R. M., Wong A. Y. // Phys. Lett. — 1966. — V. 22. — P. 585.

129. Kaplan D. E., Hill R. M., Herrmann G. F. // 8th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Contributed papers. — Vienna, 1967. — P. 424.

130. Gould R. M. // Phys. Lett. — 1965. — V. 19. — P. 477; Am. J. Phys. — 1969. — V. 37. — P. 585

131. Growford R. F., Houpp R. S. // J. Appl. Phys. — 1966. — V. 37. — P. 4405.

132. Hill R. M., Kaplan D. E. // Phys. Rev. — 1967. — V. 156. — P. 118.

133. Hill R. M., Kaplan D. E. // Phys. Lett. — 1966. — V. 23. — P. 317.

134. Gould R. W., O'Neil T. M., Malmberg J. H. // Phys. Rev. Lett. — 1967. — V. 19. — P. 219.

135. Gould R. W. // Phys. Lett. — 1967. — V. 25A. — P. 559.

136. Malmberg J. H., Wharton C. B., Gould R. W., O'Neil T. M. // Phys. Rev. Lett. — 1968. — V. 20. — P. 95.

137. Ikezi H., Takahashi N. // Phys. Rev. Lett. — 1968. — V. 20. — P. 140.

138. Baker D. R., Ahern N. R., Wong A. Y. // Phys. Rev. Lett. — 1968. — V. 20. — P. 318.

139. *Su C H., Oberman C.* // Phys. Rev. Lett. — 1968. — V. 20. — P. 427.
140. *Malmberg J. H., Wharton C. B., Gould R. W., O'Neil T. M.* // Phys. Fluids. — 1968. — V. 11. — P. 1147.
141. *Porkolab M., Sinnes J.* // Phys. Rev. Lett. — 1968. — V. 21. — P. 1227.
142. *Ikezi H., Takahashi N., Nishikiwa K.* // Phys. Fluids. — 1969. — V. 12. — P. 853.
143. *Ситенко А. Г., Нгуен Ван Чонг, Павленко В. Н.* // Ядер. синтез. — 1970. — Т. 10. — С. 259.

Вопросы, касающиеся турбулентности плазмы, изложены в книгах:

144. *Кадомцев Б. Б.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат. — 1964. — Вып. 4. — С. 188.
145. *Цытович В. Н.* Нелинейные эффекты в плазме. — М.: Наука, 1967.
146. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1973. — Вып. 7. — С. 3.
147. *Davidson R. C.* Nonlinear Plasma Theory. — N. Y.: Academic press, 1971.
148. *Ishimaru S.* Basic Principles of Plasma Physics. — Benjamin, 1973.
149. *Цытович В. Н.* Теория турбулентной плазмы. — М.: Госатомиздат, 1971.
150. *Веденов А. А.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1963. — Вып. 3. — С. 203.

Различные типы неустойчивостей подробно описаны в книгах и обзорах:

151. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей. — М.: Атомиздат, 1969.
152. *Кадомцев Б. Б.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1963. — Вып. 2. — С. 132.
153. *Тимофеев А. Б., Пистунович В. И.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1967. — Вып. 5. — С. 351.
154. *Михайловский А. Б.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1972. — Вып. 6. — С. 70.
155. *Соловьев Л. С.* // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1972. — Вып. 6. — С. 210.
156. *Силин В. П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973.

Желобковая неустойчивость плазмы была установлена и подробно исследована в работах:

157. *Rosenbluth M., Longmire C.* // App. Phys. — 1957. — V. 1. — P. 120.
158. *Кадомцев Б. Б.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — Т. 4. — С. 16.
159. *Иоффе М. С., Соколов Р. И., Тельковский В. Г., Юшманов Е. Е.* // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40. — С. 40.
160. *Иоффе М. С., Юшманов Е. Е.* // Ядер. синтез. — 1962. — Дополнение, ч. 1. — С. 177.

161. Готт Ю. В., Иоффе М. С., Тельковский В. Г. // Ядер. синтез. — 1957. — Дополнение, ч. 3. — С. 1045.  
 162. Иоффе М. С., Соболев Р. И., Тельковский В. Г., Юшманов Е. Е. // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 39. — С. 1602.  
 163. Кадомцев Б. Б. // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40. — С. 328.  
 164. Байбородов Ю. Т., Иоффе М. С., Петров В. М., Соболев Р. И. // Атом. энергия. — 1963. — Т. 14 — С. 443.  
 165. Иоффе М. С., Соболев Р. И. // Атом. энергия. — 1964. — Т. 17. — С. 366.  
 166. Кадомцев Б. Б., Иоффе М. С. // УФН. — 1970. — Т. 100. — С. 601.

По поводу ловушек «с минимумом В» см.:

167. Andreoletti J. // Compt. rend. — 1963. — V. 257. — P. 1033, 1235.  
 168. Damm C., Foote J. et al. // Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. — 1969. — V. 1. — P. 253.  
 169. Furth H. // Adv. in Plasma Phys. — 1968. — V. 1. — P. 67.

Относительно винтовой неустойчивости см.:

170. Шафранов В. Д. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — Т. 4. — С. 61.  
 171. Kruskal M. D., Schwarzschild M. // Proc. Roy. Soc. — 1954. — V. A233. — P. 348.  
 172. Newcomb W. A. // Ann. Phys. — 1960. — V. 10. — P. 232.  
 173. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 65. — С. 575.

Диссипативные неустойчивости описаны в статьях:

174. Furth H., Rosenbluth M., Killeen J. // Phys. Fluids. — 1963. — V. 6. — P. 459.  
 175. Kadomtsev V. B., Nedospasov A. V. // J. Nucl. Energy. — 1960. — V. C1. — P. 230.  
 176. Rebut P. H. // J. Nucl. Energy. — 1962. — V. C4. — P. 159.

По поводу дрейфовых неустойчивостей существует обширная литература, мы упомянем лишь основные работы:

177. Церковников Ю. А. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 67.  
 178. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. // ДАН СССР. — 1961. — Т. 138. — С. 581.  
 179. Rosenbluth M. N., Rostoker N., Krall N. A. // Nucl. Fusion. — 1962. — Suppl. 1. — P. 143.  
 180. Михайловский А. Б. // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1963. — Вып. 3. — С. 141.  
 181. Тимофеев А. В. // ЖТФ. — 1963. — Т. 33. — С. 909.  
 182. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44. — С. 263; ЖТФ. — 1964. — Т. 34. — С. 248.  
 183. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 45. — С. 1566.  
 184. Krall N. A. // Adv. in Plasma Phys. — 1968. — V. 1. — P. 153.

Кинетические и параметрические неустойчивости описаны в работах:

185. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. // ЖТФ. — 1962. — Т. 32. — С. 1291.

186. *Силин В. П.* // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 1679.  
 187. *Dubois D. F., Goldman M. V.* // Phys. Rev. Lett. — 1965. — V. 14. — P. 544.  
 188. *Nishikawa K. J.* // Phys. Soc. Jap. — 1968. — V. 24. — P. 916, 1152.  
 189. *Андреев И. Е., Кирий Ю. А., Силин В. П.* // ЖЭТФ. — 1969. — Т. 57. — С. 1024.  
 190. *Kruer W. L., Kaw P. K., Dawson J. M., Oberman C.* // Phys. Rev. Lett. — 1970. — V. 24. — P. 987.  
 191. *Rosenbluth M. N.* // Phys. Rev. Lett. — 1972. — V. 29. — P. 565.  
 192. *Rosenbluth M. N., White R. B., Liu C. S.* // Phys. Rev. Lett. — 1973. — V. 31. — P. 1190.

Относительно квазилинейного приближения см.:

193. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* // Ядер. синтез. — 1962. — Приложение 2. — С. 465.  
 194. *Drummond W. E., Pines D.* // Nucl. Fusion. — 1962. — Suppl. 3. — P. 1049.  
 195. *Романов Ю. А., Филиппов Г. Ф.* // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40. — С. 123.  
 196. *Robertson C., Gentile K. W.* // Phys. Fluids. — 1971. — Т. 14. — С. 2780.

По поводу слабой турбулентности существует довольно обширная литература, мы укажем здесь только часть ее:

197. *Захаров В. Е.* // ПМТФ. — 1965. — № 4. — С. 25.  
 198. *Захаров В. Е., Филоненко Н. Н.* // ПМТФ. — 1967. — № 5. — С. 62.  
 199. *Katak M., Kantrowitz A. R., Litvac M.* // Nucl. Fusion. — 1962. — Suppl. 1, 2. — P. 421.  
 200. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43. — С. 2234.  
 201. *Aamodt R., Drummond W. B.* // J. Nucl. Energy. — 1964. — V. 6. — P. 147.  
 202. *Галеев А. А., Карпман В. И.* // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44. — С. 592.  
 203. *Пайерлс Р. Е.* Квантовая теория твердых тел. — М.: ИЛ, 1956.  
 204. *Кац А. В., Конторович В. М.* // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 64. — С. 153.  
 205. *Кадомцев Б. Б., Конторович В. М.* // Изв. вузов. Радиофизика. — 1974. — Т. 17. — С. 511.

Относительно ионно-звуковой турбулентности и аномального сопротивления см.:

206. *Бабыкин М. В., Завойский Е. К., Рудаков Л. И., Скорюпин В. А.* // Ядер. синтез. — 1962. — Приложение 3. — С. 1073.  
 207. *Field E. C., Fried V. P.* // Phys. Fluids. — 1964. — V. 7. — P. 1937.  
 208. *Рудаков Л. И., Кораблев Л. В.* // ЖЭТФ. — 1966. — Т. 50. — С. 220.  
 209. *Коврижных Л. М.* // ЖЭТФ. — 1967. — Т. 52. — С. 1416.  
 210. *Завойский Е. К., Рудаков Л. И.* // Атом. энергия. — 1967. — Т. 23. — С. 417.

211. Калинин Ю. Г., Лин Д. Н., Рудаков Л. М., Рютов Д. Д. и др. // ЖЭТФ. — 1970. — Т. 59. — С. 1056.  
 212. Петвишвили В. И. // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44. — С. 1933; ДАН СССР. — 1963. — Т. 153. — С. 1295.  
 213. Карчевский А. И., Аверин В. Г., Безмельницкий В. Н. // Письма в ЖЭТФ. — 1969. — Т. 10. — С. 26; ЖЭТФ. — 1970. — Т. 58. — С. 1131.  
 214. Векштейн Г. Е., Рютов Д. Д., Сагдеев Р. З. // ЖЭТФ. — 1971. — Т. 60. — С. 2142.  
 215. Сагдеев Р. З. // Проблемы теории плазмы. — Киев, 1972. — С. 278.  
 216. Jancařík J., Hamberger S. M. // Report on 8th Europ. Conf. on Plasma Physics, Rome, 1970.  
 217. Векштейн Г. Е., Сагдеев Р. З. // Письма в ЖЭТФ. — 1970. — Т. 11. — С. 305.

Ленгмюровская турбулентность обсуждалась в статьях:

218. Цытович В. Н., Шапиро В. Д. // Ядер. синтез. — 1965. — Т. 5. — С. 228.  
 219. Рудаков Л. И. // ЖЭТФ. — 1970. — Т. 59. — С. 2091.  
 220. Веденов А. А., Рудаков Л. И. // ДАН СССР. — 1964. — Т. 159. — С. 767.  
 221. Захаров В. Е. // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 62. — С. 1745.  
 222. Рудаков Л. И. // ДАН СССР. — 1972. — Т. 207. — С. 821.  
 223. Брейzman Б. Н., Рютов Д. Д., Чебогаев Р. З. // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 62. — С. 1409.  
 224. Kingsep A. S., Rudakov L. I., Sudan R. N. // Phys. Rev. Lett. — 1973. — V. 31. — P. 1483.  
 225. Дегтярев Л. М., Маханьков В. Г., Рудаков Л. И. // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 67. — С. 533.  
 226. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е. // Письма в ЖЭТФ. — 1974. — Т. 20. — С. 365.  
 227. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е. // Препринт / ИПМ. — 1974. — № 109.  
 228. Kim H. C., Stenzel R. L., Wong A. Y. // Phys. Rev. Lett. — 1974. — V. 33. — P. 886.  
 229. Захаров В. Е., Мушер С. Л., Рубенчик А. М. // Письма в ЖЭТФ. — 1974. — Т. 19. — С. 249.

В связи с обсуждением МГД-турбулентности см.:

230. Rusbridge M. G., Lees D. J., Saunders P. A. H. // Nucl. Fusion. — 1962. — Suppl. 3. — P. 903.  
 231. Бабичев А. Б., Карчевский А. И. и др. // Ядер. синтез. — 1962. — Т. 2. — С. 84; Дополнение 2. — С. 635, 1962.  
 232. Кадомцев Б. Б. // Ядер. синтез. — 1962. — Дополнение 3. — С. 969.  
 233. Robinson D. C., Rusbridge M. G. // Plasma Phys. — 1969. — V. 11. — P. 73.  
 234. Butt E. P., Gowers C. W. et al. // Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. — Vienna: IAEA, 1975. — V. 3. — P. 417.  
 235. Linden-Bell D. // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. — 1967. — V. 136. — P. 101.  
 236. Holi F. // Bull. Am. Phys. Soc. — 1968. — V. 13. — P. 1745.

237. *Kadomtsev B. B., Pogutse O. P.* // Phys. Rev. Lett. — 1970 — V. 25. — P. 1155.
238. *Dupree T. H.* // Phys. Rev. Lett. — 1970. — V. 26. — P. 789.
239. *Dupree T. H.* // Comm. Plasma Phys. — 1972. — V. 1, № 2.
240. *Kadomtsev B. B.* // Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res.— Vienna: IAEA, 1977. — V. 1. — P. 555.
241. *Giovanelli R. G.* // Mon. Not. RAS. — 1947. — V. 107. — P. 338.
242. *Dungey J. W.* Cosmic Electrodynamics. — L.: Cambridge Univ. Press, 1958.
243. *Dungey J. W.* // Phys. Rev. Lett. — 1961. — V. 6. — P. 47.
244. *Akasofu S. I.* // Planet. and Space Sci. — 1964. — V. 12. — P. 273; Polar and Magnetospheric Substorm. — Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1968.
245. *Parker E. N.* // J. Geophys. Res. — 1957. — V. 62. — P. 509; Astrophys. J. Suppl. Ser. — 1963. — V. 8. — P. 177.
246. *Sweet P. A.* // Electromagnetic Phenomena in Cosmic Physics / Ed. Lehnert. — L.: Cambridge Univ. Press, 1958.
247. *Petschek H. E.* // AS/NASA Symposium on the Physics of Solar Flares // Ed. W. N. Hess. — Washington: D. C., 1964.
248. *Coppi B., Laval G., Pellat R.* // Phys. Rev. Lett. — 1966. — V. 16. — P. 1207.
249. *Schindler K.* // J. Geophys. Res. — 1974. — V. 79. — P. 2803.
250. *Галеев А. А., Зеленый Л. М.* // Письма ЖЭТФ. — 1975. — Т. 22. — С. 170; ЖЭТФ. — 1975. — Т. 69. — С. 882; Ibid. — 1976. — Т. 70. — С. 2183.
251. *Galeev A. A., Coroniti F. V., Ashour-Abdalla M.* // Geophys. Res. Lett. — 1978. — V. 5. — P. 707.
252. *Сыроватский С. И.* // Астрон. ж. — 1966. — Т. 43. — С. 340; Ann. Rev. Astron. and Astrophys. — 1981. — V. 19. — P. 163.
253. *Сыроватский С. И., Франк А. Г., Ходжаев А. З.* // ЖТФ. — 1973. — Т. 43. — С. 912.
254. *Stenzel R. L., Gekelman W.* // Phys. Rev. Lett. — 1979. — V. 42. — P. 1055; J. Geophys. Res. — 1981. — V. 86. — P. 649; Proc. of the 15th Intern. Conference on Phenomena in Ionized Gases. — Minsk. P. 46.
255. *Арцимович Л. А., Мирнов С. В., Стрелков В. С.* // Атом. энергия. — Т. 17. — С. 170.
256. *Горбунов Е. П., Разумова К. А.* // Атом. энергия. — 1963. — Т. 15. — С. 363.
257. *Goeler S., Stodiek W., Sauthoff N.* // Phys. Rev. Lett. — 1974. — V. 33. — P. 1201.
258. *Кадоццев Б. Б.* // Физ. плазмы. — 1975. — Т. 1. — С. 710.
259. *Dubois M. A., Samain A.* // Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. — Vienna: IAEA, 1978. — V. 1. — P. 615; Nucl. Fusion. — 1980. — V. 20. — P. 1101.
260. *Lichtenberg A. J.* // Nucl. Fusion. — 1984. — V. 24 — P. 1277.
261. *Waddell B. V., Carreras B. A., Hicks H. R., Holmes J. A.* // Phys. Fluids — 1979. — V. 22. — P. 896.
262. *Waddell B. V., Carreras B. A., Hicks H. R. et al.* // Phys. Rev. Lett. — 1978. — V. 41. — P. 1386.
263. *Waddell B. V., Monticello D. A., Rosenbluth M. N., White R. B.* // Nucl. Fusion. — 1976. — V. 16. — P. 528.
264. *Strauss H. R.* // Phys. Fluids. — 1976. — V. 19. — P. 134.

265. Днестровский Ю. Н., Лысенко С. Е., Смит П // Физ. плазмы. — 1977. — Т. 1. — С. 18.
266. Bussac M. N., Pellat R, Ederly D, Soule J. L. // Phys. Rev. Lett. — 1975. — V. 35. — P. 1638.
267. Bussac M. N, Ederly D., Pellat R, Soule J. L // Phys. Rev. Lett. — 1978. — V. 40. — P. 1500.
268. Dubois M. A., Pecquet A. L., Reverden C. // Phys. Rev. Lett. — 1983. — V. 23. — P. 147.
269. Мережкин В. Г. // Физ. плазмы. — 1978. — Т. 4. — С. 152.
270. Ohkawa T. // Phys. Lett. — 1978. — V. A67. — P. 35.
271. Callen J. D., Waddell B. V. et al. // Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. — Vienna: IAEA. — 1979. — V. 1. — P. 415.
272. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 65. — С. 575; Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. — Vienna: IAEA, 1984. Paper E.—11—2.
273. Захаров Л. Е // Письма ЖЭТФ. — 1980. — Т. 31. — С. 756; Физ. плазмы. — 1981. — Т. 7. — С. 18.
274. Rusbridge M. G. // Plasma Phys. — 1977. — V. 19. — P. 499; Nucl. Fusion. — 1982. — V. 22. — P. 1291.



*Кадо́мцев Борис Борисович*

**КОЛЛЕКТИВНЫЕ  
ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕ**

Редактор *Н. А. Михалина*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры *Е. Ю. Рычагова, И. Я. Кришталь*

ИБ № 32397

Сдано в набор 10.11.87. Подписано к печати 20.04.88. Т-09572.

Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура  
литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,96.

Усл. кр.-отт. 15,96.

Уч.-изд. л. 15,97. Тираж 4100 экз. Заказ № 361. Цена 3 р. 10 к.

---

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
И17071 Москва В-71, Ленинский проспект. 15

---

Подольский филиал ПО «Периодика» Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли  
142110, г. Подольск, ул. Кирова, 25

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука».  
Заказ 1878 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6.